Übung 5: Resolution & Kalküle

Diskrete Strukturen im Wintersemester 2013/2014

Markus Kaiser

2. Dezember 2013

Definition (Resolvent)

Seien K_1, K_2 und R Klauseln in Mengendarstellung. Dann heißt R Resolvent von K_1 und K_2 wenn $L \in K_1$, $\neg L \in K_2$ und

$$R = (K_1 \setminus \{L\}) \cup (K_2 \setminus \{\neg L\})$$

Resolution

Gegeben eine Formel F in KNF in Mengendarstellung.

while $\square = \emptyset \notin F$ **do**
  $R \leftarrow$ Resolvent aus F mit $R \notin F$
  if R existiert **then**
    $F \leftarrow F \cup R$
  else
    return erfüllbar
return unerfüllbar

Definition (Kalkül)

Ein Logikkalkül stellt Inferenzregeln bereit, mit denen Formeln syntaktisch umgeformt werden können.

Definition (Folgerung)

F folgt aus A, wenn mit Hilfe der Semantik der Aussagenlogik F unter der Annahme dass A gilt zu true ausgewertet wird. Wir schreiben

$$A \models F$$

Definition (Ableitung)

F kann aus A abgeleitet werden, wenn mit Hilfe syntaktischer Umformungen in einem Logikkalkül F unter der Annahme A bewiesen werden kann. Wir schreiben

$$A \vdash F$$

Eigenschaften von Kalkülen

korrekt (sound) Es können nur semantisch gültige Formeln abgeleitet werden.

$$\text{Aus } A \vdash F \text{ folgt } A \models F$$

vollständig (complete) Alle semantisch gültigen Formeln können abgeleitet werden.

$$\text{Aus } A \models F \text{ folgt } A \vdash F$$

- Für uns nur korrekte vollständige Kalküle
- Beispiel für die Aussagenlogik: Natürliches Schließen
- Es gibt keine solchen Kalküle für die
  - Prädikatenlogik
  - Arithmetik
- Deshalb sind nicht alle Sätze der Mathematik beweisbar

Natürliches Schließen

	Introduktion	Elimination
$\wedge$	$\dfrac{\tau \qquad \varphi}{\tau \wedge \varphi}\ {+\wedge}$	$\dfrac{\tau \wedge \varphi}{\tau}\ {-\wedge_1}$ $\qquad$ $\dfrac{\tau \wedge \varphi}{\varphi}\ {-\wedge_2}$
$\vee$	$\dfrac{\tau}{\tau \vee \varphi}\ {+\vee_1}$ $\qquad$ $\dfrac{\varphi}{\tau \vee \varphi}\ {+\vee_2}$	$\dfrac{\tau \vee \varphi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\tau \\ \vdots \\ \chi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots \\ \chi\end{array}}}{\chi}\ {-\vee}$
$\rightarrow$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\tau \\ \vdots \\ \varphi\end{array}}}{\tau \rightarrow \varphi}\ {+\rightarrow}$	$\dfrac{\tau \qquad \tau \rightarrow \varphi}{\varphi}\ {-\rightarrow}$, MP
$\neg$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\tau \\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\neg\tau}\ {+\neg}$	$\dfrac{\tau \qquad \neg\tau}{\bot}\ {-\neg}$

	Introduktion	Elimination
$\perp$		$\dfrac{\perp}{\tau}\,{-\perp}$
$\neg\neg$	$\dfrac{\tau}{\neg\neg\tau}\,{+\neg\neg}$	$\dfrac{\neg\neg\tau}{\tau}\,{-\neg\neg}$

- Praktische abgeleitete Regeln

$$\frac{}{\tau \vee \neg\tau}\ \text{LEM}$$

$$\frac{\boxed{\begin{matrix}\neg\tau \\ \vdots \\ \perp\end{matrix}}}{\tau}\ {-\neg},\ \text{PBC}$$

$$\frac{\neg\varphi \qquad \tau \to \varphi}{\neg\tau}\ \text{MT}$$