

Übung 6: Prädikatenlogik

Diskrete Strukturen im Wintersemester 2013/2014

Markus Kaiser

2. Dezember 2013

Definition (Term)

Die Menge \mathcal{T} aller **Terme** ist induktiv definiert.

- Jede Konstante ist in \mathcal{T}
- Jede Variable ist in \mathcal{T}
- Sind f eine Funktion und t_1, \dots, t_n Terme, dann auch

$$f(t_1, \dots, t_n)$$

Funktionen wandeln Terme in **Terme** um. Wir beschreiben sie mit Kleinbuchstaben.

Definition (Prädikat)

Prädikate P wandeln Terme in **Wahrheitswerte** um. Wir beschreiben sie mit Großbuchstaben.

Die Menge \mathcal{P} enthält alle **Prädikate**.

Definition (Syntax der Prädikatenlogik)

Die Menge \mathcal{L} aller **prädikatenlogischen Formeln** ist induktiv definiert. Seien $A, B \in \mathcal{L}$, $t_i \in \mathcal{T}$ und $P \in \mathcal{P}$. Dann sind alle Formeln

■ Grundbausteine

$$V = \{a, b, \dots\} \subseteq \mathcal{L} \quad (\text{Variablen})$$

$$P(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{L} \quad (\text{Prädikate, Konstanten})$$

$$t_i = t_j \in \mathcal{L} \quad (\text{Gleichheit})$$

■ Verknüpfungen der Aussagenlogik

$$\neg A \in \mathcal{L} \quad (\text{Negation})$$

$$(A \wedge B), (A \vee B) \in \mathcal{L} \quad (\text{Konjunktion, Disjunktion})$$

$$(A \rightarrow B) \in \mathcal{L} \quad (\text{Implikation})$$

■ Quantoren

$$\exists x.A \in \mathcal{L} \quad (\text{Existenzquantor})$$

$$\forall x.A \in \mathcal{L} \quad (\text{Allquantor})$$

Definition (Bindungsregeln)

Die **Bindungsstärke** der Operatoren in absteigender Reihenfolge ist

$$\forall \exists \neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$$

Die Implikation ist **rechtsassoziativ**.

- Üblicherweise klammert man wieder \wedge und \vee
- Genauso klammert man Quantoren

$$(\forall x.F) \rightarrow G \quad \text{statt} \quad \forall x.F \rightarrow G$$

- **Achtung!** Äußere Quantoren werden öfter anders interpretiert

$$\forall x \forall y.F \wedge G \leftrightarrow H$$

Bindet formal **nur an das F!**

Definition (Struktur)

Eine passende **Struktur** $S = (U_S, I_S)$ zu einer Formel F besteht aus einem **Universum** U_S und einer **Interpretation** I_S .

- Alle Terme werten zu einem Wert im **Universum** U_S aus
- Die **Interpretation** I_S weist den Atomen der Formel Werte zu. Sie spezifiziert

- **Variablen** x mit

$$x_S \in U_S$$

- **Konstanten** a mit

$$a_S \in U_S$$

- **k-stellige Prädikate** P mit

$$P_S \subseteq U_S^k$$

- **Funktionen** f mit

$$f_S : U_S^k \rightarrow U_S$$

Eigenschaften homogener Relationen

Sei $R \in M \times M$ eine homogene Relation. Man nennt R

reflexiv $\forall a \in M. (a, a) \in R$

total $\forall a, b \in M. (a, b) \in R \vee (b, a) \in R$

symmetrisch $\forall a, b \in M. (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$

asymmetrisch $\forall a, b \in M. (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R$

antisymmetrisch $\forall a, b \in M. (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \rightarrow a \equiv b$

transitiv $\forall a, b, c \in M. (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$

- Jede totale Relation ist reflexiv
- Jede asymmetrische Relation ist antisymmetrisch
- **Äquivalenzrelationen** sind reflexiv, symmetrisch und transitiv
- R^+ ist die **transitive Hülle**, R^* die **reflexive transitive Hülle**