Übung 5: Resolution & Kalküle

Diskrete Strukturen im Wintersemester 2013/2014

Markus Kaiser

18. November 2013

Definition (Resolvent)

Seien K_1, K_2 und R Klauseln in Mengendarstellung. Dann heißt R Resolvent von K_1 und K_2 wenn $L \in K_1$, $\neg L \in K_2$ und

$$R = (K_1 \setminus \{L\}) \cup (K_2 \setminus \{\neg L\})$$

Resolution

Gegeben eine Formel F in KNF in Mengendarstellung.

while $\Box = \emptyset \notin F$ **do**
  $R \leftarrow$ Resolvent aus F mit $R \notin F$
  if R existiert **then**
    $F \leftarrow F \cup R$
  else
    return erfüllbar
return unerfüllbar

Definition (Kalkül)

Ein Logikkalkül stellt Inferenzregeln bereit, mit denen Formeln syntaktisch umgeformt werden können.

Definition (Folgerung)

F folgt aus A, wenn mit Hilfe der Semantik der Aussagenlogik F unter der Annahme dass A gilt zu true ausgewertet wird. Wir schreiben

$$A \vDash F$$

Definition (Ableitung)

F kann aus A abgeleitet werden, wenn mit Hilfe syntaktischer Umformungen in einem Logikkalkül F unter der Annahme A bewiesen werden kann. Wir schreiben

$$A \vdash F$$

Eigenschaften von Kalkülen

korrekt (sound) Es können nur semantisch gültige Formeln abgeleitet werden.

Aus $A \vdash F$ folgt $A \models F$

vollständig (complete) Alle semantisch gültigen Formeln können abgeleitet werden.

Aus $A \models F$ folgt $A \vdash F$

- Für uns nur korrekte vollständige Kalküle
- Beispiel für die Aussagenlogik: Natürliches Schließen
- Es gibt keine solchen Kalküle für die
  - Prädikatenlogik
  - Arithmetik
- Deshalb sind nicht alle Sätze der Mathematik beweisbar

Natürliches Schließen

	Introduktion	Elimination
$\wedge$	$\dfrac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}\ {+\wedge}$	$\dfrac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ {-\wedge_1} \qquad \dfrac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ {-\wedge_2}$
$\vee$	$\dfrac{\phi}{\phi \vee \psi}\ {+\vee_1} \qquad \dfrac{\psi}{\phi \vee \psi}\ {+\vee_2}$	$\dfrac{\phi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\ {-\vee}$
$\rightarrow$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\phi \rightarrow \psi}\ {+\rightarrow}$	$\dfrac{\phi \qquad \phi \rightarrow \psi}{\psi}\ {-\rightarrow}$, MP
$\neg$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\ {+\neg}$	$\dfrac{\neg\phi}{\bot}\ {-\neg}$

	Introduktion	Elimination
$\bot$		$\dfrac{\bot}{\phi}\ {-\bot}$
$\neg\neg$	$\dfrac{\phi}{\neg\neg\phi}\ {+\neg\neg}$	$\dfrac{\neg\neg\phi}{\phi}\ {-\neg\neg}$

- Praktische abgeleitete Regeln

$$\frac{}{\phi \vee \neg\phi}\ \text{LEM}$$

$$\frac{\boxed{\begin{matrix}\neg\phi \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}}{\phi}\ -\neg,\ \text{PBC}$$

$$\frac{\neg\psi \qquad \phi \rightarrow \psi}{\neg\phi}\ \text{MT}$$