Übung 7: Kalküle II & Induktion

Diskrete Strukturen im Wintersemester 2013/2014

Markus Kaiser

2. Dezember 2013

	Introduktion	Elimination
$\wedge$	$\dfrac{\tau \qquad \varphi}{\tau \wedge \varphi}\,+\wedge$	$\dfrac{\tau \wedge \varphi}{\tau}\,-\wedge_1 \qquad \dfrac{\tau \wedge \varphi}{\varphi}\,-\wedge_2$
$\vee$	$\dfrac{\tau}{\tau \vee \varphi}\,+\vee_1 \qquad \dfrac{\varphi}{\tau \vee \varphi}\,+\vee_2$	$\dfrac{\tau \vee \varphi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\tau\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\,-\vee$
$\rightarrow$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\tau\\ \vdots\\ \varphi\end{array}}}{\tau \rightarrow \varphi}\,+\rightarrow$	$\dfrac{\tau \qquad \tau \rightarrow \varphi}{\varphi}\,-\rightarrow$, MP
$\neg$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\tau\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\tau}\,+\neg$	$\dfrac{\tau \qquad \neg\tau}{\bot}\,-\neg$

	Introduktion	Elimination
$\bot$		$\dfrac{\bot}{\tau}\;{-\bot}$
$\neg\neg$	$\dfrac{\tau}{\neg\neg\tau}\;{+\neg\neg}$	$\dfrac{\neg\neg\tau}{\tau}\;{-\neg\neg}$

- Praktische abgeleitete Regeln

$$\dfrac{}{\tau \vee \neg\tau}\;\text{LEM}$$

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\tau\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\tau}\;{-\neg},\ \text{PBC}$$

$$\dfrac{\neg\varphi \qquad \tau \to \varphi}{\neg\tau}\;\text{MT}$$

Natürliches Schließen

Definition (Ersetzung)

Sei φ eine Formel und a eine Konstante.
Mit $\varphi[x/a]$ bezeichnen wir die Formel die man erhält, wenn man alle freien Vorkommnisse von x in φ durch a ersetzt.

	Introduktion	Elimination
$\exists$	$\dfrac{\tau[x/a]}{\exists x.\tau}\,{+\exists}$	$\dfrac{\exists x.\tau \qquad \boxed{\begin{array}{c} a.\tau[x/a] \\ \vdots \\ \chi \end{array}}}{\chi}\,{-\exists}$
$\forall$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c} a \\ \vdots \\ \tau[x/a] \end{array}}}{\forall x.\tau}\,{+\forall}$	$\dfrac{\forall x.\tau}{\tau[x/a]}\,{-\forall}$

- Man muss ein unbenutztes a in $+\forall$ und $-\exists$ wählen

Vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist eine Beweistechnik, um zu zeigen, dass alle natürlichen Zahlen ein Prädikat P erfüllen.

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 . P(x)$$

Ein solcher Beweis besteht aus

Induktionsanfang Man zeigt, dass $P(0)$ gilt.

Induktionsschritt Man zeigt für ein beliebiges k, dass wenn $P(k)$ gilt (Induktionshypothese), dann auch $P(k+1)$.

Zusammen beweisen die Teile, dass das Prädikat für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

In Prädikatenlogik formuliert gilt in $\mathbb{N}_0$

$$P(0) \land \forall k. (P(k) \to P(k+1)) \to \forall n . P(n)$$

- Kann verallgemeinert werden, z.B. auf $\mathbb{Z}$
- Aber nicht auf $\mathbb{R}$ (Warum?)