

Übung 2: Relationen und Abbildungen

Diskrete Strukturen im Wintersemester 2013/2014

Markus Kaiser

25. November 2013

Definition (Relation)

Eine binäre **Relation** R verbindet Elemente zweier Mengen A und B .

$$R \subseteq A \times B$$

Ist $(a, b) \in R$, so schreibt man auch aRb .

- Eine Relation über $M \times M$ nennt man homogen
- Es gibt $|\mathcal{P}(A \times B)|$ Relationen über A, B

Beispiel

- Die **Gleichheitsrelation** über $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
 $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), \dots\}$
- Die **Teilbarkeitsrelation** über \mathbb{N}
 $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (2, 2), (2, 4), \dots, (3, 3), (3, 6), \dots\}$

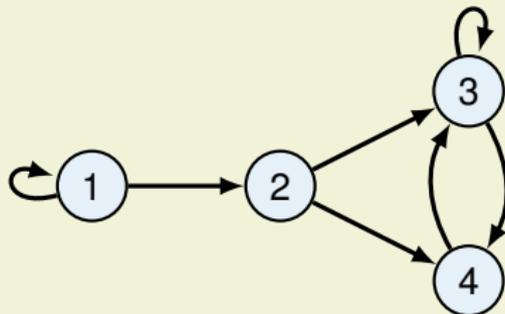
Grafische Darstellung von Relationen

Jede Relation $R \subseteq M \times M$ kann als **Graph** dargestellt werden. Die Elemente aus M werden zu **Knoten** und für jedes Tupel $(a, b) \in R$ wird ein **Pfeil** von a nach b eingefügt.

Beispiel

Sei $R \subseteq [4] \times [4]$ eine Relation über den natürlichen Zahlen.

$$R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 3)\}$$



Eigenschaften homogener Relationen

Sei $R \in M \times M$ eine homogene Relation. Man nennt R

reflexiv $\forall a \in M. (a, a) \in R$

total $\forall a, b \in M. (a, b) \in R \vee (b, a) \in R$

symmetrisch $\forall a, b \in M. (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$

asymmetrisch $\forall a, b \in M. (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R$

antisymmetrisch $\forall a, b \in M. (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \rightarrow a \equiv b$

transitiv $\forall a, b, c \in M. (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$

- Jede totale Relation ist reflexiv
- Jede asymmetrische Relation ist antisymmetrisch
- **Äquivalenzrelationen** sind reflexiv, symmetrisch und transitiv
- R^+ ist die **transitive Hülle**, R^* die **reflexive transitive Hülle**

Definition (Funktion)

Eine Relation $f \subseteq A \times B$ ist eine **Funktion von A nach B** wenn es für alle $a \in A$ genau ein Element $b \in B$ mit $a f b$ gibt.

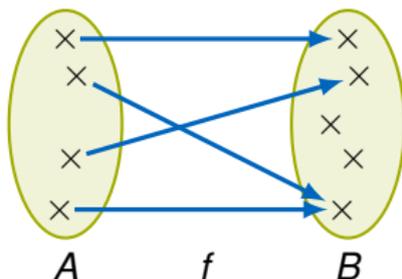
$$\forall a \in A. |\{(a, b) \mid b \in B\}| = 1$$

Man schreibt

$$f : A \rightarrow B$$

$$a \mapsto f(a) = b$$

$A \rightarrow B$ bezeichnet die Menge aller Funktionen von A nach B.



Definition (Bild)

Sei $f : A \rightarrow B$ eine Funktion, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$, $b \in B$. Dann ist

$$f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$$

das **Bild** der Menge X unter f . Außerdem ist

$$f^{-1}(b) := \{a \mid a \in A, f(a) = b\}$$

$$f^{-1}(Y) := \bigcup_{y \in Y} \{f^{-1}(y)\}$$

das **Urbild** des Elements b und der Menge Y unter f .

- Man nennt $A = f^{-1}(B)$ **Urbild** oder **Definitionsmenge** von f
- Man nennt $f(A) \subseteq B$ **Bild** oder **Wertemenge** von f

Definition (Funktionskomposition)

Seien $f : B \rightarrow C$ und $g : A \rightarrow B$ Funktionen. Dann ist

$$h : A \rightarrow C$$

$$a \mapsto (f \circ g)(a) = f(g(a))$$

die **Komposition** der Funktionen f und g .

Man liebt $f \circ g$ als „f nach g“.

Man definiert die Potenzierung von Funktionen ähnlich der Mengentheorie.

$$f^0 := id$$

$$f^n := \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ mal}}$$

Dabei bezeichnet id die **Identität** mit $id(x) := x$.

Eigenschaften von Funktionen

Sei $f : A \rightarrow B$ eine Funktion. Man nennt f

injektiv $\forall b \in B. |f^{-1}(b)| \leq 1$ (Kein b wird doppelt getroffen)

surjektiv $\forall b \in B. |f^{-1}(b)| \geq 1$ (Jedes b wird getroffen)

bijektiv $\forall b \in B. |f^{-1}(b)| = 1$ (Jedes b wird genau einmal getroffen)

