Übung 4: Aussagenlogik II

Diskrete Strukturen im Wintersemester 2013/2014

Markus Kaiser

12. November 2013

Äquivalenzregeln

Identität	$F \wedge 1 \equiv F$	$F \vee 0 \equiv F$
Dominanz	$F \vee 1 \equiv 1$	$F \wedge 0 \equiv F$
Idempotenz	$F \vee F \equiv F$	$F \wedge F \equiv F$
Doppelte Negation	$\neg\neg F \equiv F$	
Triviale Tautologie	$F \vee \neg F \equiv 1$	
Triviale Kontradiktion	$F \wedge \neg F \equiv 0$	
Kommutativität	$F \vee G \equiv G \vee F$	
	$F \wedge G \equiv G \wedge F$	
Assoziativität	$(F \vee G) \vee H \equiv F \vee (G \vee H)$	
	$(F \wedge G) \wedge H \equiv F \wedge (G \wedge H)$	
Distributivität	$F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$	
	$F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$	
De Morgan	$\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$	
	$\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$	
Implikation	$F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G$	
Bikonditional	$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$	

Literale und Klauseln

Definition (Literal)

Ein Literal ist eine Variable $v \in V$ oder die Negation $\neg v$ einer Variable.

Definition (Klausel)

Eine Klausel verknüpft mehrere Literale mit einem assoziativen Operator.

Beispiel

Seien $a, \neg b, c$ Literale. Dann sind

- $a \wedge \neg b \wedge c$
- $a \vee \neg b \vee c$

Klauseln.

Definition (Disjunktive Normalform)

Eine DNF-Klausel ist eine Konjunktion von Literalen L_i.
Eine Formel F, ist in Disjunktiver Normalform, wenn sie eine Disjunktion von DNF-Klauseln ist.

$$F := \bigvee \bigwedge_i L_i$$

- Ausnahme: false ist auch in DNF

Beispiel

F ist in DNF.

$$F := \underbrace{(a \wedge b \wedge \neg c)}_{\text{DNF-Klausel}} \vee \underbrace{(\neg b \wedge c)}_{\text{DNF-Klausel}} \vee \underbrace{(\neg a \wedge b \wedge \neg c)}_{\text{DNF-Klausel}}$$

Definition (Konjunktive Normalform)

Eine KNF-Klausel ist eine Disjunktion von Literalen L_i.
Eine Formel F, ist in Konjunktiver Normalform, wenn sie eine Konjunktion von KNF-Klauseln ist.

$$F := \bigwedge \bigvee_i L_i$$

- Ausnahme: true ist auch in KNF

Beispiel

F ist in KNF.

$$F := \underbrace{(\neg a \vee b)}_{\text{KNF-Klausel}} \wedge \underbrace{(\neg b \vee c)}_{\text{KNF-Klausel}} \wedge \underbrace{(a \vee b \vee \neg c)}_{\text{KNF-Klausel}}$$

Konstruktion der NF

- Jede nicht-triviale Formel ist in DNF und KNF umwandelbar
- Durch Äquivalenzumformungen berechenbar (exponentiell groß!)
- Oder: Konstruktion mit Wahrheitstabellen

Normalformen aus Wahrheitstabellen

Gegeben eine Formel F und ihre Wahrheitstabelle

- DNF
  1. Betrachte Zeilen mit Eintrag 1
  2. Bilde Konjunktion aus der Belegung
  3. Bilde Disjunktion aller erhaltenen Klauseln

- KNF
  1. Betrachte Zeilen mit Eintrag 0
  2. Bilde Disjunktion aus der Negation der Belegung
  3. Bilde Konjunktion aller erhaltenen Klauseln

Beispiel

Gegeben eine Formel F mit folgender Semantik

a	b	c	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

F dargestellt in

- DNF $(\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)$
- KNF $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$

Mengendarstellung der KNF

Eine Formel $F = \bigwedge \bigvee L_i$ in KNF kann in einer Mengendarstellung repräsentiert werden.

- Klauseln werden durch Mengen von Literalen dargestellt

$$\{a, \neg b, c\} \text{ steht für } (a \vee \neg b \vee c)$$

- KNF-Formeln sind Mengen von Klauseln

$$\{\{\neg a\}, \{a, \neg b, c\}\} \text{ steht für } \neg a \wedge (a \vee \neg b \vee c)$$

- $\emptyset$ steht für true, $\{\emptyset\}$ für false

Beispiel

Gegeben $F := (a \vee b) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$ in KNF.

$$\{\{a, b\}, \{\neg a, b, \neg c\}, \{\neg a, \neg b, \neg c\}\}$$

KNF aus Syntaxbaum

Idee

Erzeuge die KNF aus dem Syntaxbaum

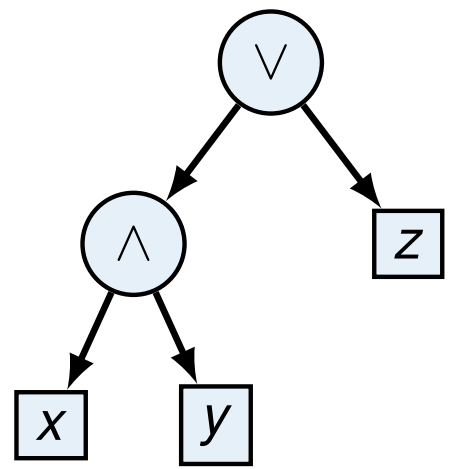
1. Weise jedem inneren Knoten eine Variable zu
2. Variablen sind abhängig von ihren Kindern
3. Berechne kleine KNFs und führe diese zusammen

$$(x \wedge y) \vee z \equiv$$

$$\equiv$$

$$\wedge (A_\vee \leftrightarrow A_\wedge \vee z)$$
$$\wedge (A_\wedge \leftrightarrow x \wedge y)$$

$$\wedge (A_\vee \vee \neg A_\wedge) \wedge (A_\vee \vee \neg z)$$
$$\wedge (\neg A_\vee \vee A_\wedge \vee z)$$
$$\wedge (\neg A_\wedge \vee x) \wedge (\neg A_\wedge \vee y)$$
$$\wedge (A_\wedge \vee \neg x \vee \neg y)$$



KNF aus Syntaxbaum

Idee

Erzeuge die KNF aus dem Syntaxbaum

1. Weise jedem inneren Knoten eine Variable zu
2. Variablen sind abhängig von ihren Kindern
3. Berechne kleine KNFs und führe diese zusammen

$$(x \wedge y) \vee z \equiv$$

$$\wedge\, (A_\vee \leftrightarrow A_\wedge \vee z)$$

$$\wedge\, (A_\wedge \leftrightarrow x \wedge y)$$

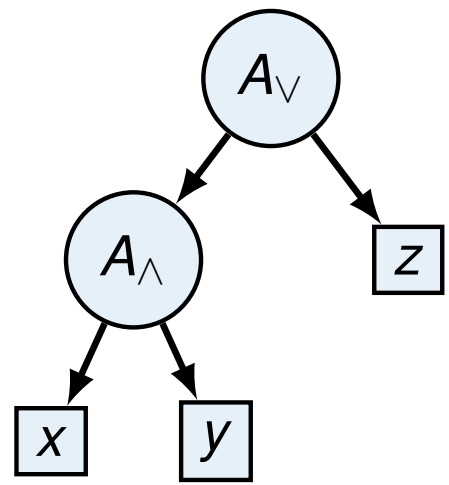
$$\equiv$$

$$\wedge\, (A_\vee \vee \neg A_\wedge) \wedge (A_\vee \vee \neg z)$$

$$\wedge\, (\neg A_\vee \vee A_\wedge \vee z)$$

$$\wedge\, (\neg A_\wedge \vee x) \wedge (\neg A_\wedge \vee y)$$

$$\wedge\, (A_\wedge \vee \neg x \vee \neg y)$$



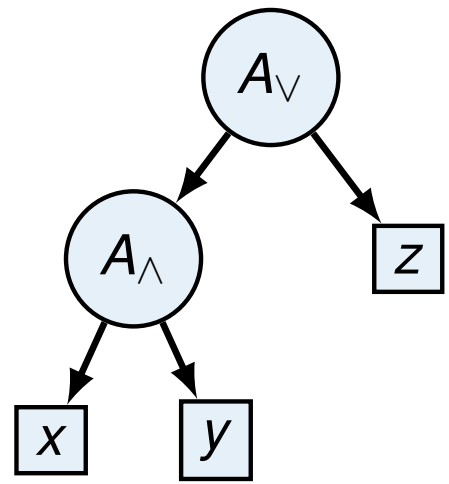
KNF aus Syntaxbaum

Idee

Erzeuge die KNF aus dem Syntaxbaum

1. Weise jedem inneren Knoten eine Variable zu
2. Variablen sind abhängig von ihren Kindern
3. Berechne kleine KNFs und führe diese zusammen

$$
\begin{aligned}
(x \wedge y) \vee z \equiv \quad & A_\vee \\
& \wedge (A_\vee \leftrightarrow A_\wedge \vee z) \\
& \wedge (A_\wedge \leftrightarrow x \wedge y) \\
\equiv \quad & \\
& \wedge (A_\vee \vee \neg A_\wedge) \wedge (A_\vee \vee \neg z) \\
& \wedge (\neg A_\vee \vee A_\wedge \vee z) \\
& \wedge (\neg A_\wedge \vee x) \wedge (\neg A_\wedge \vee y) \\
& \wedge (A_\wedge \vee \neg x \vee \neg y)
\end{aligned}
$$



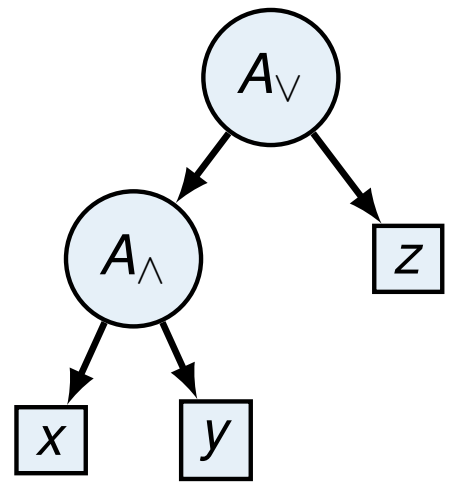
KNF aus Syntaxbaum

Idee

Erzeuge die KNF aus dem Syntaxbaum

1. Weise jedem inneren Knoten eine Variable zu
2. Variablen sind abhängig von ihren Kindern
3. Berechne kleine KNFs und führe diese zusammen

$$
\begin{aligned}
(x \wedge y) \vee z \equiv \quad & A_\vee \\
& \wedge (A_\vee \leftrightarrow A_\wedge \vee z) \\
& \wedge (A_\wedge \leftrightarrow x \wedge y) \\
\equiv \quad & A_\vee \\
& \wedge (A_\vee \vee \neg A_\wedge) \wedge (A_\vee \vee \neg z) \\
& \quad \wedge (\neg A_\vee \vee A_\wedge \vee z) \\
& \wedge (\neg A_\wedge \vee x) \wedge (\neg A_\wedge \vee y) \\
& \quad \wedge (A_\wedge \vee \neg x \vee \neg y)
\end{aligned}
$$



Definition (DPLL-Belegung)

Sei F eine Formel in KNF und p eine Variable von F.
Dann bezeichnet $F[p \backslash \mathrm{true}]$ die Formel, die entsteht, wenn jedes Vorkommnis von p in F durch true ersetzt und vereinfacht wird.

DPLL

Gegeben eine Formel F in KNF

- Wenn $F = \mathrm{true}$ dann antworte „erfüllbar“
- Wenn $F = \mathrm{false}$ dann antworte „unerfüllbar“
- Sonst
  1. Wähle eine Variable p in F
  2. Prüfe ob $F[p \backslash \mathrm{true}]$ oder $F[p \backslash \mathrm{false}]$ erfüllbar

- Schlaue Wahl der Variable beschleunigt Ausführung
- Wähle Variablen die einzeln stehen (One-Literal-Rule)