Übung 6: Prädikatenlogik

Diskrete Strukturen im Wintersemester 2013/2014

Markus Kaiser

25. November 2013

Definition (Term)

Die Menge $\mathcal{T}$ aller Terme ist induktiv definiert.

- Jede Konstante ist in $\mathcal{T}$
- Jede Variable ist in $\mathcal{T}$
- Sind f eine Funktion und $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann auch

$$f(t_1, \ldots, t_n)$$

Funktionen wandeln Terme in Terme um. Wir beschreiben sie mit Kleinbuchstaben.

Definition (Prädikat)

Prädikate P wandeln Terme in Wahrheitswerte um. Wir beschreiben sie mit Großbuchstaben.
Die Menge $\mathcal{P}$ enthält alle Prädikate.

Definition (Syntax der Prädikatenlogik)

Die Menge $\mathcal{L}$ aller prädikatenlogischen Formeln ist induktiv definiert. Seien $A, B \in \mathcal{L}$, $t_i \in \mathcal{T}$ und $P \in \mathcal{P}$. Dann sind alle Formeln

- Grundbausteile

$$V = \{a, b, \dots\} \subseteq \mathcal{L} \qquad \text{(Variablen)}$$
$$P(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{L} \qquad \text{(Prädikate, Konstanten)}$$
$$t_i = t_j \in \mathcal{L} \qquad \text{(Gleichheit)}$$

- Verknüpfungen der Aussagenlogik

$$\neg A \in \mathcal{L} \qquad \text{(Negation)}$$
$$(A \wedge B), (A \vee B) \in \mathcal{L} \qquad \text{(Konjunktion, Disjunktion)}$$
$$(A \rightarrow B) \in \mathcal{L} \qquad \text{(Implikation)}$$

- Quantoren

$$\exists x.A \in \mathcal{L} \qquad \text{(Existenzquantor)}$$
$$\forall x.A \in \mathcal{L} \qquad \text{(Allquantor)}$$

Operatorenbindung

Definition (Bindungsregeln)

Die Bindungsstärke der Operatoren in absteigender Reihenfolge ist

$$\forall \quad \exists \quad \neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$$

Die Implikation ist rechtsassoziativ.

- Üblicherweise klammert man wieder $\wedge$ und $\vee$
- Genauso klammert man Quantoren

$$(\forall x.F) \rightarrow G \quad \text{statt} \quad \forall x.F \rightarrow G$$

- Achtung! Äußere Quantoren werden öfter anders interpretiert

$$\forall x \forall y.F \wedge G \leftrightarrow H$$

Bindet formal nur an das F!

Definition (Struktur)

Eine passende Struktur $S = (U_s, I_s)$ zu einer Formel F besteht aus einem Universum U_s und einer Interpretation I_s.

- Alle Terme werten zu einem Wert im Universum U_s aus
- Die Interpretation I_s weist den Atomen der Formel Werte zu. Sie spezifiziert
  - Variablen x mit
    $$x_s \in U_s$$
  - Konstanten a mit
    $$a_s \in U_s$$
  - k-stellige Prädikate P mit
    $$P_s \subseteq U_s^k$$
  - Funktionen f mit
    $$f_s : U_s^k \rightarrow U_s$$

Eigenschaften homogener Relationen

Sei $R \in M \times M$ eine homogene Relation. Man nennt R

reflexiv	$\forall a \in M.\ (a,a) \in R$
total	$\forall a,b \in M.\ (a,b) \in R \vee (b,a) \in R$
symmetrisch	$\forall a,b \in M.\ (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$
asymmetrisch	$\forall a,b \in M.\ (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \notin R$
antisymmetrisch	$\forall a,b \in M.\ (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \rightarrow a \equiv b$
transitiv	$\forall a,b,c \in M.\ (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R$

- Jede totale Relation ist reflexiv
- Jede asymmetrische Relation ist antisymmetrisch
- Äquivalenzrelationen sind reflexiv, symmetrisch und transitiv
- R^+ ist die transitive Hülle, R^* die reflexive transitive Hülle