

Übung 5: Resolution & Kalküle

Diskrete Strukturen im Wintersemester 2013/2014

Markus Kaiser

8. Januar 2014

Definition (Resolvent)

Seien K_1 , K_2 und R Klauseln in Mengendarstellung. Dann heißt R **Resolvent** von K_1 und K_2 wenn $L \in K_1$, $\neg L \in K_2$ und

$$R = (K_1 \setminus \{L\}) \cup (K_2 \setminus \{\neg L\})$$

Resolution

Gegeben eine Formel F in KNF in Mengendarstellung.

```
while  $\square = \emptyset \notin F$  do  
   $R \leftarrow$  Resolvent aus  $F$  mit  $R \notin F$   
  if  $R$  existiert then  
     $F \leftarrow F \cup R$   
  else  
    return erfüllbar  
return unerfüllbar
```

Definition (Kalkül)

Ein **Logikkalkül** stellt **Inferenzregeln** bereit, mit denen Formeln **syntaktisch** umgeformt werden können.

Definition (Folgerung)

F **folgt aus** A , wenn mit Hilfe der **Semantik** der **Aussagenlogik** F unter der Annahme dass A gilt zu true ausgewertet wird. Wir schreiben

$$A \models F$$

Definition (Ableitung)

F kann aus A **abgeleitet** werden, wenn mit Hilfe **syntaktischer** Umformungen in einem **Logikkalkül** F unter der Annahme A bewiesen werden kann. Wir schreiben

$$A \vdash F$$

Eigenschaften von Kalkülen

korrekt (sound) Es können **nur** semantisch gültige Formeln abgeleitet werden.

Aus $A \vdash F$ folgt $A \models F$

vollständig (complete) **Alle** semantisch gültigen Formeln können abgeleitet werden.

Aus $A \models F$ folgt $A \vdash F$

- Für uns nur korrekte vollständige Kalküle
- Beispiel für die Aussagenlogik: **Natürliches Schließen**
- Es gibt keine solchen Kalküle für die
 - Prädikatenlogik
 - Arithmetik
- Deshalb sind nicht alle Sätze der Mathematik beweisbar

	Introduktion	Elimination
\wedge	$\frac{\tau \quad \varphi}{\tau \wedge \varphi} +\wedge$	$\frac{\tau \wedge \varphi}{\tau} -\wedge_1 \quad \frac{\tau \wedge \varphi}{\varphi} -\wedge_2$
\vee	$\frac{\tau}{\tau \vee \varphi} +\vee_1 \quad \frac{\varphi}{\tau \vee \varphi} +\vee_2$	$\frac{\tau \vee \varphi \quad \boxed{\begin{array}{c} \tau \\ \vdots \\ \chi \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ \chi \end{array}}}{\chi} -\vee$
\rightarrow	$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \tau \\ \vdots \\ \varphi \end{array}}}{\tau \rightarrow \varphi} +\rightarrow$	$\frac{\tau \quad \tau \rightarrow \varphi}{\varphi} -\rightarrow, \text{MP}$
\neg	$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \tau \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{\neg \tau} +\neg$	$\frac{\tau \quad \neg \tau}{\perp} -\neg$

	Introduktion	Elimination
\perp		$\frac{\perp}{\tau} \text{ -- } \perp$
$\neg\neg$	$\frac{\tau}{\neg\neg\tau} \text{ ++}$	$\frac{\neg\neg\tau}{\tau} \text{ --}\neg$

■ Praktische abgeleitete Regeln

$$\frac{}{\tau \vee \neg\tau} \text{ LEM}$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \neg\tau \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{\tau} \text{ --}\neg, \text{ PBC}$$

$$\frac{\neg\varphi \quad \tau \rightarrow \varphi}{\neg\tau} \text{ MT}$$