Übung 10: Inklusion/Exklusion & Stirlingzahlen

Diskrete Strukturen im Wintersemester 2013/2014

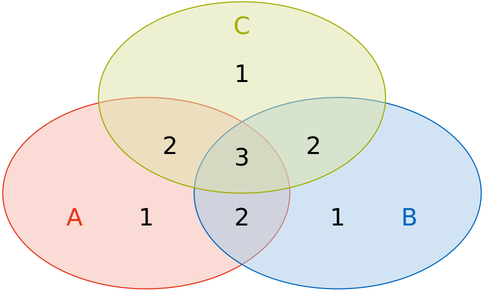
Markus Kaiser

8. Januar 2014

Inklusion und Exklusion

Das Prinzip der Inklusion und Exklusion erweitert die Summenregel um nicht disjunkte Mengen.
Für drei Mengen A, B, C gilt

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| = |A| &+ |B| + |C| \\ &- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ &+ |A \cap B \cap C|\end{aligned}$$



Definition (Binomialkoeffizient)

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge an.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

Man sagt n über k oder k aus n.

- $\binom{n}{k}$ viele Möglichkeiten, k Elemente aus n Elementen zu wählen

Satz (Pascalsche Identität)

Die Pascalsche Identität liefert eine rekursive Definition des Binomialkoeffizienten.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Definition (k-Partition)

Eine k-Partition einer Menge A ist eine Zerlegung von A in k disjunke, nichtleere Teilmengen $A_1, \ldots, A_k$ mit

$$\biguplus_{i=1}^{k} A_i = A$$

Dabei bezeichnet $\uplus$ die disjunkte Vereinigung.

Beispiel

Einige mögliche 3-Partitionen von $[5]$ sind

$$\{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\} \qquad \{\{1\},\{3,4\},\{2,5\}\}$$
$$\{\{1,2,3\},\{4\},\{5\}\} \qquad \{\{1,5\},\{2,4\},\{3\}\}$$

Es existieren genau 25 solche 3-Partitionen.

Definition (Stirlingzahlen zweiter Art)

Die Stirlingzahl zweiter Art $S_{n,k}$ gibt die Anzahl der k-Partitoinen einer n-elementigen Menge an. Wir schreiben

$$\left\{ n \atop k \right\} := S_{n,k}$$

Es ist

$$\left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \cdot \left\{ n-1 \atop k \right\}$$

- $\left\{ n \atop k \right\}$ viele Möglichkeiten, n unterscheidbare Objekte in k gleiche Fächer zu verteilen, sodass jedes Fach ein Objekt bekommt

Beispiel

- Es gibt $\left\{ 5 \atop 3 \right\} = 25$ 3-Partitionen von $[5]$.

Definition (Permutation)

Eine Permutation einer Menge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ist eine bijektive Abbildung $\pi : A \to A$.
Wir notieren Permutationen in zweizeiligen Vektoren.

$$\pi = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \\ \pi(a_1) & \ldots & \pi(a_n) \end{pmatrix}$$

- Weist jedem Element in A ein neues, eindeutiges Element in A zu.
- „Mischt“ die Elemente einer Menge

Beispiel

π ist eine Permutation auf $[9]$.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 4 & 7 & 2 & 6 & 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Es ist $\pi(1) = 3$, $\pi(4) = 7$.

Definition (k-Zyklus)

Ein *k-Zyklus* ist eine Permutation π, die k verschiedene Zahlen $i_1, \ldots, i_k$ im Kreis vertauscht.

$$\pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ i_2 & i_3 & \ldots & i_1 \end{pmatrix}$$

Wir schreiben auch

$$\pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \end{pmatrix}$$

Jede Permutation ist eine Verkettung disjunkter Zyklen.

Beispiel

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 4 & 7 & 2 & 6 & 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

π enthält vier Zyklen.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Definition (Stirlingzahlen erster Art)

Die Stirlingzahl erster Art $s_{n,k}$ gibt die Anzahl der Permutationen mit n Elementen und k Zyklen an. Wir schreiben

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} := s_{n,k}$$

Es ist

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

- Es gilt $\sum_{k=1}^{n} \left[{n \atop k}\right] = n!$

Beispiel

- Es gibt $\left[{9 \atop 4}\right] = 67284$ Permutationen über $[9]$ mit vier Zyklen.