Übung 11: Graphen & Bäume

Diskrete Strukturen im Wintersemester 2013/2014

Markus Kaiser

14. Januar 2014

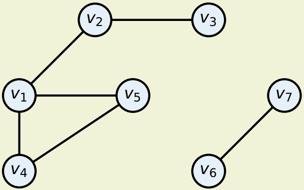
Definition (Graph)

Ein (einfacher, ungerichteter) Graph $G = (V, E)$ ist ein Zweitupel aus Knotenmenge V und Kantenmenge $E \subseteq \binom{V}{2}$.

- $\binom{V}{2}$ ist Notation für alle zweielementigen Teilmengen.
- V für Vertices, E für Edges

Beispiel

$$G = (V, E)$$
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$
$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}, \{v_6, v_7\}\}$$

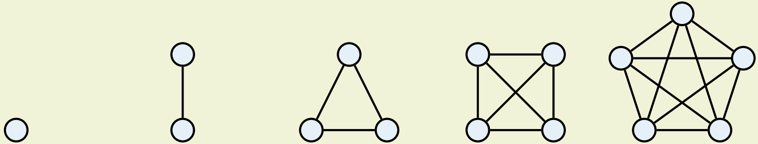


Definition (Vollständiger Graph)

Im vollständigen Graphen K_n mit n Knoten sind alle Knoten durch Kanten verbunden.

- Er enthält $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ Kanten.

Beispiel



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Definition (k-Weg)

Ein k-Weg in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine nichtleere Folge von Knoten $(v_0, \dots, v_k) \in V^{k+1}$ von $k + 1$ Knoten, sodass zwischen aufeinanderfolgenden Knoten Kanten existieren.

$$\forall i \in \mathbb{Z}_k.\, \{v_i, v_{i+1}\} \in E$$

(v_0) bezeichnet einen 0-Weg.

Definition (k-Pfad)

Ein k-Pfad in G ist ein k-Weg in G, in dem kein Knoten mehrfach vorkommt.

Definition (k-Kreis)

Ein k-Kreis ($k \geq 3$) in G ist ein k-Weg $(v_0, \dots, v_k)$ in G, wobei $v_0, \dots, v_{k-1}$ paarweise verschieden sind und $v_0 = v_k$ gilt.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $v \in V$.

Definition (Nachbarschaft)

Die Nachbarschaft $\Gamma(v)$ eines Knotens v ist die Menge aller Knoten, die mit v über eine Kante verbunden sind.

$$\Gamma(v) = \{u \in V \mid \{v, u\} \in E\}$$

Definition (Grad)

Der Grad $\deg(v)$ bezeichnet die Anzahl der Nachbarn von v.

$$\deg(v) = |\Gamma(v)|$$

Aus v führen genau $\deg(v)$ Kanten heraus.

Definition (k-regulär)

Haben alle Knoten in G den Grad k, so nennen wir G k-regulär.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

Definition (Erreichbarkeit)

Ein Knoten $u \in V$ ist von $v \in V$ erreichbar, wenn es in G einen Pfad von u nach v gibt.

Definition (Zusammenhangskomponente)

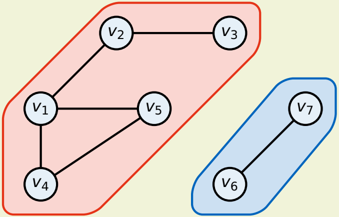
Eine Zusammenhangskomponente ist eine maximale Teilmenge von Knoten in der sich alle Knoten erreichen.
G heißt zusammenhängend, wenn nur eine solche Komponente existiert.

Beispiel

- G hat zwei Komponenten

  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$,
  $\{v_6, v_7\}$

- G ist nicht zusammenhängend



Definition (Baum)

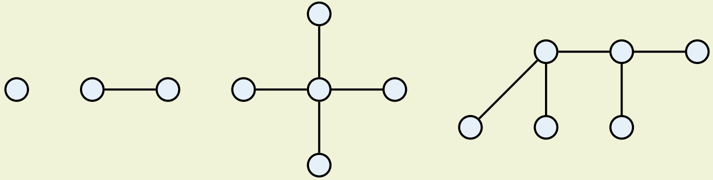
Ein ungerichteter Graph heißt Baum, falls er zusammenhängend und kreisfrei ist.

Definition (Wald)

Ein ungerichteter Graph heißt Wald, wenn seine Zusammenhangskomponenten Bäume sind.

- Wir nennen Knoten von Grad 1 Blätter
- Alle anderen Knoten heißen innere Knoten

Beispiel



Prüfercode

Der Prüfer-Code zu einem Baum $T = (V, E)$ mit Knotenmenge $V = [n]$ ist ein $(n-2)$-Tupel mit Elementen aus V.
Es gilt

- Jedem Baum kann genau ein Prüfer-Code zugeordnet werden
- Jeder Prüfer-Code stellt genau einen Baum dar

Damit wird eine Bijektion zwischen Tupeln und Bäumen definiert.

Satz (Satz von Cayley)

Es gibt genau n^{n-2} Bäume mit n Knoten.

Baum → Code

Gegeben ein Baum $T = (V, E)$ mit $|V| = n$, finde Code $(c_1, \ldots, c_{n-2})$.

for $i \leftarrow 1, n-2$ **do**
- $m \leftarrow \min\{v \in V \mid v \text{ ist Blatt}\}$ — Finde kleinstes Blatt
- $V \leftarrow V \setminus \{m\}$ — Entferne es aus T
- $c_i \leftarrow \text{parent}(m)$ — Addiere seinen Vater zum Code

Code → Baum

Gegeben ein Code $(c_1, \ldots, c_{n-2})$, finde Baum $T = (V, E)$.

$V \leftarrow [n]$ — n Knoten
$E \leftarrow \emptyset$ — Keine Kanten
$M \leftarrow \emptyset$ — Keine markierten Knoten
for $i \leftarrow 1, n-2$ **do**
- $X_i \leftarrow \{c_i, \ldots, c_{n-2}\} \cup M$ — Finde unmögliche Knoten
- $v_i \leftarrow \min([n] \setminus X_i)$ — Finde kleinsten möglichen Knoten
- $E \leftarrow E \cup \{\{c_i, v_i\}\}$ — Füge Kante $\{c_i, v_i\}$ hinzu
- $M \leftarrow M \cup \{v_i\}$ — Markiere v_i

$E \leftarrow E \cup (V \setminus M)$ — Verbinde die 2 unmarkierten Knoten