Übung 13: Graphfärbung & Planarität

Diskrete Strukturen im Wintersemester 2013/2014

Markus Kaiser

28. Januar 2014

Definition (k-Färbbarkeit)

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt k-färbbar, wenn es eine Abbildung $f : V \to [k]$ gibt, sodass

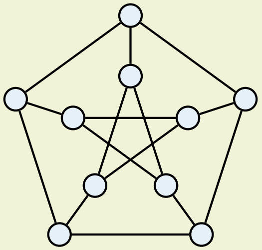
$$\forall v \in V\ \forall w \in \Gamma(v).\ f(v) \neq f(w)$$

Die chromatische Zahl $\chi(G)$ ist das kleinste k, sodass G k-färbbar ist.

- Ordne jedem Knoten eine Farbe zu
- Benachbarte Knoten haben unterschiedliche Farben

Beispiel

- G ist 3-färbbar
- G ist auch 4-färbbar
- $\chi(G) = 3$



Definition (k-Färbbarkeit)

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt k-färbbar, wenn es eine Abbildung $f : V \to [k]$ gibt, sodass

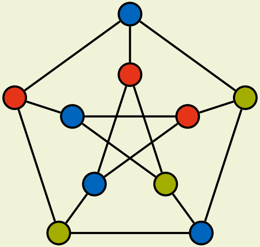
$$\forall v \in V\ \forall w \in \Gamma(v).\ f(v) \neq f(w)$$

Die chromatische Zahl $\chi(G)$ ist das kleinste k, sodass G k-färbbar ist.

- Ordne jedem Knoten eine Farbe zu
- Benachbarte Knoten haben unterschiedliche Farben

Beispiel

- G ist 3-färbbar
- G ist auch 4-färbbar
- $\chi(G) = 3$



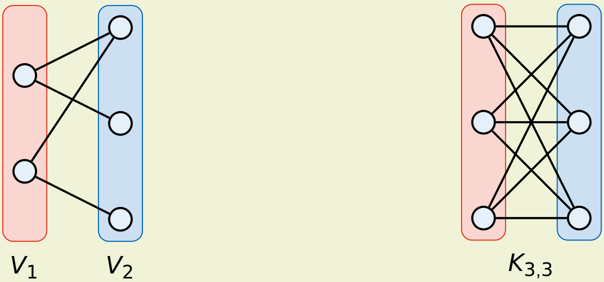
Definition (Bipartiter Graph)

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt bipartit gdw. es eine Partitionierung $V = V_1 \uplus V_2$ gibt, sodass jede Kante zwei Knoten in unterschiedlichen Klassen verbindet.

$$\forall \{v_1, v_2\} \in E.\ v_1 \in V_1 \land v_2 \in V_2$$

- G ist bipartit gdw. $\chi(G) = 2$

Beispiel



Planarität

Definition (Planarität)

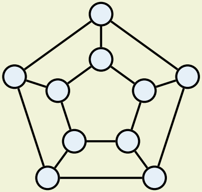
Ein Graph heißt planar, wenn er so in eine Ebene gezeichnet werden kann, dass sich keine Kanten schneiden.

Satz (Kuratowski)

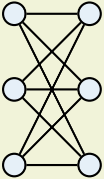
Ein Graph ist genau dann nicht planar, wenn er einen Teilgraphen enthält, der eine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ ist.

Beispiel

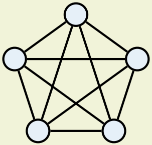
Planar



Nicht planar



$K_{3,3}$



K_5

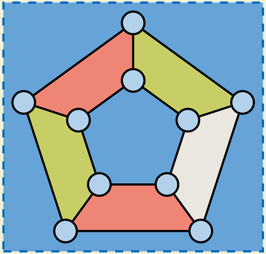
Satz (Eulersche Polyederformel)

Für einen zusammenhängenden planaren Graphen $G = (V, E)$ gilt

$$|F| - |E| + |V| - 2 = 0$$

Dabei ist $|F|$ die Anzahl von Flächen inklusive der äußeren Fläche.

Beispiel



- $|V| = 10$
- $|E| = 15$
- $|F| = 7$