Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Übungsblatt 3
28. April 2014

Theoretische Informatik

Abgabetermin: 7. Mai 2014, 10 Uhr in die **THEO Briefkästen**

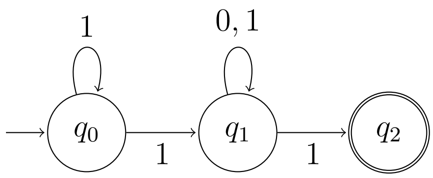
Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Beantworten Sie kurz die folgenden Fragen und begünden Sie Ihre Antwort:

1. Gibt es endliche, nicht kontextfreie Sprachen?
2. Ist die Sprache $\{a^m b^n \mid m < n\}$ kontextfrei? Begründung!
3. Welche endliche Sprache beschreibt die Grammatik mit den Produktionen $S \to aS \mid bB$ und $B \to bBb$?
4. Wie viele DFA mit Zustandsmenge $\{a\}$ und Eingabealphabet $\{0\}$ gibt es?
5. Wie viele NFA mit Zustandsmenge $\{a\}$ und Eingabealphabet $\{0\}$ gibt es?

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Durch die folgende Grafik sei ein nichtdeterministischer endlicher Automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ gegeben.



1. Bestimmen Sie $\hat{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, 0)$!
2. Konstruieren Sie mit dem Potenzmengenverfahren einen deterministischen endlichen Automat B, der $L(A)$ akzeptiert.

   Stellen Sie den erhaltenen Automat B als Übergangsgraph dar.
3. Wie ist der Automat B abzuändern, so dass B das Komplement von $L(A)$ akzeptiert, d. h., so dass $L(B) = \{0,1\}^* \setminus L(A)$ gilt?

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wir betrachten das folgende einfache Modell eines Aufzugs in einem Gebäude mit 3 Stockwerken, nummeriert mit $0, 1, 2$. Der Aufzug kann folgende Aktionen durchführen:

(`o`) Tür öffnen (open)

(`c`) Tür schließen (close)

(`u`) Ein Stockwerk nach oben fahren (up)

(`d`) Ein Stockwerk nach unten fahren (down)

Dabei gelten die Einschränkungen, dass der Aufzug niemals mit offener Tür fährt, und natürlich auch nicht in Stockwerke fährt, die nicht existieren. Es sei aber zulässig, eine bereits geschlossene bzw. offene Tür noch einmal zu schließen bzw. zu öffnen.

1. Modellieren Sie den Aufzug als NFA N über $\Sigma = \{\mathtt{o}, \mathtt{c}, \mathtt{u}, \mathtt{d}\}$, so dass $L(N)$ genau die Wörter enthält, die eine zulässige Aktionsfolge des Aufzugs darstellen.

2. Beschreiben Sie die notwendigen Änderungen, um das Modell N in einen DFA umzuwandeln!

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Die Sprache L über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ bestehe aus allen Wörtern w, so dass jedes Zeichen b und c höchstens zwischen den Zeichen a auftritt. (D. h. $acababa \in L, acbaba \notin L$.)

1. Geben Sie einen NFA A an, der L akzeptiert.

2. Nun sei $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein beliebiger NFA über $\Sigma = \{a, b, c\}$. Wir definieren $L'(N)$ als Menge aller Wörter, die man erhält, wenn man in einem Wort aus $L(N)$ alle Vorkommen von a durch das leere Wort ϵ ersetzt und die übrigen Buchstaben unverändert lässt.

   Konstruieren Sie einen NFA N', so dass $L(N') = L'(N)$ gilt.

3. Verifizieren Sie Ihre Konstruktion, indem Sie zu A den entsprechenden Automaten A' berechnen und dann möglichst vereinfachen.

Zusatzaufgabe 2 (wird nicht korrigiert)

Wir betrachten die Sprache L aller Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, die mit 00 beginnen, wenn sie mit 00 enden, und mit 11 beginnen, wenn sie mit 11 enden.
Geben Sie einen deterministischen endlichen Automat an, der L akzeptiert.

Hinweis: Beachten Sie, dass L z. B. das Wort 0001 enthält.

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

Reguläre Ausdrücke stellen Elemente einer Mengenalgebra dar. Die Operationen der Mengenalgebra sind die Konkatenation, Vereinigung („|"), Sternbildung („*") und die Operationen $\emptyset$, ϵ, sowie eine endliche Anzahl von Konstanten, d.h. nullstelligen Operationen $a, b, \ldots$, die eineindeutig den Elementen eines Alphabets Σ entsprechen. Reguläre Ausdrücke sind also nichts anderes als algebraische Ausdrücke ohne Variable über einer Mengenalgebra.
Studieren Sie die Definition des Begriffs des regulären Ausdrucks und beantworten Sie kurz die folgenden Fragen:

1. Welche Mengen stellen die Ausdrücke $\emptyset$ bzw. ϵ bzw. a, b dar?
2. Geben sie einen regulären Ausdruck an, der eine Sprache A über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ mit den Eigenschaften $01 \in A$ und $A^*A = A$ darstellt.
3. Finden Sie einen regulären Ausdruck über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, der die Menge aller Wörter beschreibt, die mit 00 beginnen und in denen 1 genau dreimal vorkommt.

Vorbereitung 2

Wann genau ist die von einem endlichen Automat erzeugt Sprache endlich?
Beantworten Sie diese Frage anhand der Länge der Pfade, die es in dem Übergangsgraph eines Automaten gibt.

Vorbereitung 3

Beweisen Sie für alle regulären Ausdrücke α und β: $(\alpha\beta)^*\alpha \equiv \alpha(\beta\alpha)^*$.

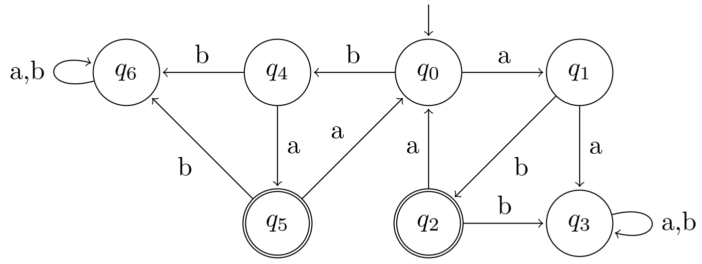
Vorbereitung 4

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Zu jedem ϵ-NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ gibt es einen äquivalenten (ϵ-freien) NFA $N' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$, so dass $|Q'| \leq |Q|$ gilt.
2. Für jeden NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ gilt: Wenn $F = Q$, dann ist $L(N) = \Sigma^*$.
3. $a(ab)^*(ba)^*b \equiv a(ab|ba)^*b$.
4. Wenn $L \subseteq \Sigma^*$ regulär ist und $\Gamma \subseteq \Sigma$,
   dann ist $L' = \{w \in L \mid w \text{ enthält nur Zeichen aus } \Gamma\}$ ebenfalls regulär.

Vorbereitung 5

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Der Automat M sei durch das folgende Diagramm gegeben. Zeigen Sie $q_3 \not\equiv_M q_4$ und $q_3 \equiv_M q_6$.



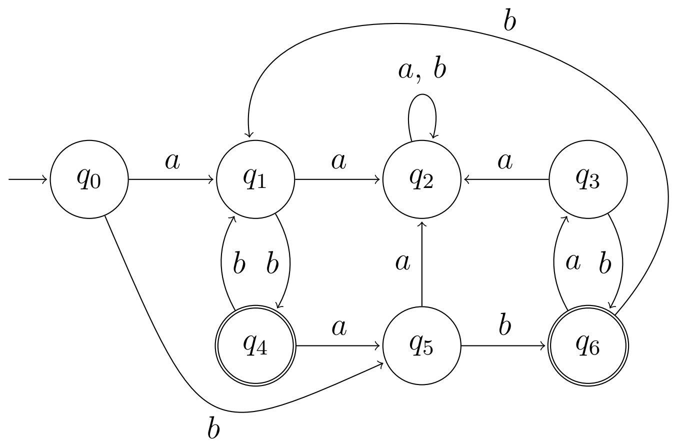
Tutoraufgabe 1 (Äquivalente Darstellungen regulärer Sprachen)
Wir betrachten den regulären Ausdruck $\alpha = (1(0|1)^*)|0$.

1. Konstruieren Sie mit dem Standardverfahren aus der Vorlesung einen ϵ-NFA A, so dass $L(\alpha) = L(A)$ gilt.
2. Wandeln Sie den erhaltenen Automat in einen äquivalenten NFA ohne ϵ-Übergänge.
3. Konstruieren Sie durch Anwendung des Potenzmengenverfahrens einen DFA, der die Sprache des Ausdrucks α akzeptiert.

Tutoraufgabe 2 (Induzierte Äquivalenz)
Sei $R = L(a^*b^*)$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Äquivalenzbeziehungen:

$$aa \equiv_R \epsilon\,, \qquad ab \equiv_R aa\,, \qquad aba \equiv_R abba\,, \qquad aba \equiv_R \epsilon\,.$$

Tutoraufgabe 3 (Quotientenautomat)
Wir betrachten den folgenden deterministischen Automat mit Alphabet $\{a, b\}$.



Verwenden Sie das in der Vorlesung vorgestellte Verfahren, um diesen Automat zu minimieren. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Stellen Sie die Tabelle aus der Vorlesung auf und geben Sie zu jedem unterscheidbaren Paar von Zuständen an, mit welchem Zeichen (oder ϵ) sie unterschieden werden können.
2. Verwenden Sie die aufgestellte Tabelle, um den Quotientenautomat zu konstruieren.