Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl XIV
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Übungsblatt 12
7. Juli 2014

Theoretische Informatik

Abgabetermin: 11. Juli 2014, 12 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$.

1. Wir betrachten das spezielle Halteproblem $K = \{w \in \Sigma^* \,;\, M_w[w]\downarrow\}$ und das Halteproblem auf leerem Band $H_0 = \{w \in \Sigma^* \,;\, M_w[\epsilon]\downarrow\}$.

   Zeigen Sie durch hinreichend genaue Spezifikation und Begründung einer Reduktionsabbildung (wie in den entsprechenden Beweisen der Vorlesung), dass H_0 reduzierbar ist auf K, d.h. $H_0 \leq K$.

2. Zeigen Sie, dass die Menge $R = \{w \in \Sigma^* \,;\, \varphi_w(0) = \perp\}$ unentscheidbar ist.
   Dabei sei φ_w diejenige (partielle) Funktion $\varphi_w : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die von der Turingmaschine M_w berechnet wird.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

1. Sei $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gegeben durch $f(m, n) = m^2 \dot{-} n$.

   Zeigen Sie, dass μf primitiv rekursiv ist.

2. Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total und μ-rekursiv, und sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch die Startwerte $f(0) = 1$ und $f(1) = 2$ zusammen mit der Rekursion

   $$f(n) = g(n) \cdot f(n-1) \cdot f(n-2) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2\,.$$

   Zeigen Sie durch Anwendung der Erzeugungsregeln für μ-rekursive Funktionen mit Hilfe der Paarfunktion $c : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und deren Umkehrfunktionen c_1 und c_2, dass f μ-rekursiv ist.

   Hinweis:
   Sie dürfen zusätzlich zu den Basisfunktionen der primitiven Rekursion die folgenden Funktionen als primitiv rekursiv annehmen: $plus(m, n)$ $(+)$, $times(m, n)$ $(\cdot)$, $pred(n)$, $c(m, n)$, $c_1(n)$, $c_2(n)$, $ifthen(n, a, b)$ und die konstante k-stellige Funktion c_n^k. Sie dürfen die erweiterte Komposition und das erweiterte rekursive Definitionsschema benützen. LOOP- und WHILE-Programme sind nicht erlaubt.

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet und seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ rekursiv auflistbare Sprachen. Zeigen Sie:

1. $L_1 := ABA$ ist rekursiv auflistbar.

2. $L_2 := A \cap B$ ist rekursiv auflistbar.

Hinweis: Die Cantorsche Paarfunktion bzw. die dazugehörigen Projektionen c_1 und c_2 könnten hilfreich sein.

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Geben Sie jeweils ein Beispiel für die folgenden Objekte an. Falls kein solches Objekt existiert, begründen Sie dies.

1. Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die primitiv rekursiv ist, aber deren Definitionsbereich (also $\{n \in \mathbb{N}\,;\, f(n) \neq \bot\}$) endlich ist.

2. Eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$, die total ist und für die $\{w \in \Sigma^*\,;\, \varphi_w = f\}$ entscheidbar ist.

3. Eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$, die nicht rekursiv aufzählbar ist und deren Komplement ebenfalls nicht rekursiv aufzählbar ist.

4. Ein unentscheidbarer Wertebereich einer berechenbaren Funktion.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie im Folgenden Ihre Antworten möglichst knapp!

1. Wenn f berechenbar ist, dann ist $A_f := \{w \in \Sigma^*\,;\, f(w) \neq \bot\}$ semi-entscheidbar.

2. Für das spezielle Halteproblem $K = \{w \in \{0,1\}^*\,;\, M_w[w]\downarrow\}$ und eine beliebige Sprache A gilt: Wenn $K \cap A$ entscheidbar ist, dann ist A endlich.

3. Für jede Turingmaschine M ist die Funktion

$$f_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } M \text{ auf allen Eingaben hält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   berechenbar.

4. Wenn f und g primitiv rekursiv sind, und $f(x) = g(h(x))$ für alle x gilt, dann ist auch h primitiv rekursiv.

Zusatzaufgabe 9 (Wird nicht korrigiert)

Geben Sie für jede der folgenden Mengen an, ob sie entscheidbar ist oder nicht. Beweisen Sie ihre Behauptungen.

1. $L_1 = \{w \in \Sigma^* \,;\, \varphi_w(0) = 0\}$.
2. $L_2 = \{w \in \Sigma^* \,;\, \varphi_w(w) = w\}$.
3. $L_3 = \{w \in \Sigma^* \,;\, \varphi_0(0) = w\}$.

Zusatzaufgabe 10 (Wird nicht korrigiert)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Eine Sprache ist genau dann vom Typ 0, wenn sie rekursiv auflistbar ist.
2. Das folgende Problem ist entscheidbar:

   Gegeben: Eine deterministische Turingmaschine M.

   Problem: Schreibt M mit leerer Eingabe jemals ein nicht-$\square$ Symbol auf das Band?

3. Wenn eine Turingmaschine M bei einer Eingabe w das Band nie verändert, dann sagen wir, dass M ohne Speicherung arbeitet und schreiben dafür $OS(M, w)$. Wir definieren $OS = \{(v, w) \,;\, OS(M_v, w)\}$.

   Dann ist OS entscheidbar.

4. Die folgende Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist berechenbar:

   $$f(x) = \begin{cases} 1 : P = NP \\ 0 : \text{sonst} \end{cases}$$

   Informieren Sie sich über die Probleme P und NP.