Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Übungsblatt 11
30. Juni 2014

Theoretische Informatik

Abgabetermin: 9. Juli 2014, 10 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $P(k,\overline{x})$ ein primitiv rekursives $(n+1)$-stelliges Prädikat, wobei $\overline{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ eine Abkürzung sei für die letzten n Stellen und $n = 0$ den einstelligen Fall $P(k)$ bedeute. In den Beweisen dürfen erweiterte Komposition und erweiterte Schemata benützt werden.

1. Sei $\max\emptyset = 0$. Zeigen Sie, dass die folgende Funktion $q(m,\overline{x})$ primitiv rekursiv ist.
$$q(m,\overline{x}) = \max\{k\,;\, k\leq m \;\wedge\; P(k,\overline{x})\}\,.$$
Die entsprechende Aussage aus der Vorlesung ist zum Beweis nicht verwendbar. Begründen Sie diesen Sachverhalt!

2. Zeigen Sie, dass der folgende beschränkte Existenzquantor primitiv rekursiv ist.
$$Q(m,\overline{x}) := \exists k\leq m:\; P(k,\overline{x})\,.$$
Hinweis: Es ist von Vorteil, zunächst im Fall $\hat{P}(0,\overline{x}) = 0$ für alle $m \geq 0$ die folgende Gleichung zu beweisen:
$$\hat{Q}(m,\overline{x}) = 1 \dot{-} (1 \dot{-} q(m,\overline{x}))\,.$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Ganzzahlige Division $Div(m,n)$ von natürlichen Zahlen m und n ist definiert durch
$$Div(m,0) = 0 \quad\text{und}\quad Div(m,n) = \max\{k\,;\, k\cdot n \leq m\} \quad\text{für}\quad n \neq 0\,.$$
Zeigen Sie, dass $Div(m,n)$ primitiv rekursiv ist.

Hinweis: Verwerten Sie die Erkenntnisse aus Hausaufgabe 1 und definieren Sie ein Prädikat $P(k,m,n) := (k\cdot n \leq m) \wedge (n \neq 0)$. Beweisen Sie zunächst, dass $P(k,m,n)$ primitiv rekursiv ist.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die für alle $n \geq 3$ der linearen Rekursion $f(n) = f(n-1) + f(n-3)$ genügt. Außerdem gelte $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 3$.

1. Zeigen Sie, dass f primitiv rekursiv ist.

2. Sei W_f der Wertebereich von f, d. h. $W_f = \{f(n)\,;\, n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie, dass W_f entscheidbar ist.

3. Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Umkehrfunktion von f auf dem Wertebereich W_f von f, d. h., dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n = g(f(n))$ und für $y \notin W_f$ gilt, dass $g(y)$ nicht definiert ist. Zeigen Sie, dass g WHILE-berechenbar ist.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Ackermann-Funktion.

1. Zeigen Sie, dass $f(m, n) := (a(m, n))^2$ nicht primitiv-rekursiv ist.
2. Die Funktion $a' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei gegeben durch $a'(n) = a(n, n)$.
   Sei $W_{a'} = \{a'(n)\,;\, n \in \mathbb{N}\}$.

   Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion $b' : W_{a'} \to \mathbb{N}$ von a' μ-rekursiv ist.

Zusatzaufgabe 8 (Wird nicht korrigiert)

Im Folgenden bezeichne $a(n, m)$ die Ackermann-Funktion.
Berechnen Sie $a(1, 6)$ und $a(2, 1)$!

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

In einem Tresor liegt eine Liste mit 6-stelligen TAN-Nummern. Der Schlüssel zum Öffnen des Tresors ist verloren gegangen und es gibt keine andere Möglichkeit, den Tresor zu öffnen.

Sei A die Menge der Primzahlen, die auf der TAN-Liste vorkommen.

Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ entscheidbar? Begründung!

Vorbereitung 2

Beantworten Sie kurz die folgenden Fragen:

1. Jede unentscheidbare Sprache enthält eine entscheidbare Teilmenge.
2. Jede Teilmenge einer entscheidbaren Sprache ist entscheidbar.
3. Für jede unentscheidbare Sprache A gibt es eine echte Obermenge, die ebenfalls unentscheidbar ist.
4. Aus „A entscheidbar“ und „$A \cap B$ entscheidbar“ folgt „B entscheidbar“.

Vorbereitung 3

Wir betrachten die in der Vorlesung beschriebene Kodierung von Turingmaschinen durch Wörter über $\Sigma^* = \{0,1\}^*$. Für ein $w \in \Sigma^*$ beschreibt $\varphi_w : \Sigma^* \to \Sigma^*$ dann die Funktion, die durch die Turingmaschine M_w berechnet wird. Finden Sie informelle Beschreibungen für die folgenden Mengen:

1. $A = \{w \in \Sigma^* \, ; \, \varphi_w = \Omega\}$.
2. $B = \{w \in \Sigma^* \, ; \, \varphi_w(101) \neq \perp\}$.

Vorbereitung 4

Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit der folgenden Mengen und wenden Sie zum Beweis Techniken der Reduzierbarkeit eines Problems A auf ein Problem B an.

1. $H_{\Sigma^*} = \{w \, ; \, M_w$ hält für mindestens eine Eingabe$\}$.
2. $C = \{w \, ; \, M_w$ berechnet die Funktion g mit $g(n) = 0$ für alle n$\}$.

Tutoraufgabe 1

1. Falls A auf B mit Funktion f reduzierbar ist, dann gilt $f^{-1}(B) = A$, aber nicht notwendigerweise $f(A) = B$. Beweis!

2. Falls A reduzierbar auf B und B semi-entscheidbar ist, dann ist auch A semi-entscheidbar. Beweis!

3. Sei $B \subseteq \Sigma^*$ mit $B \neq \Sigma^*$ und $B \neq \emptyset$ entscheidbar.
   Zeigen Sie: B ist reduzierbar auf $\Sigma^* \setminus B$.

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten die in der Vorlesung beschriebene Kodierung von Turingmaschinen durch Wörter über $\Sigma^* = \{0,1\}^*$. Für ein $w \in \Sigma^*$ beschreibt $\varphi_w : \Sigma^* \to \Sigma^*$ dann die Funktion, die durch die Turingmaschine M_w berechnet wird. Finden Sie informelle Beschreibungen für die folgenden Mengen:

1. $C = \{w \in \Sigma^*\,;\, \varphi_w(\epsilon) = w\}$.

2. $D = \{(u,v,w) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^*\,;\, \varphi_u(w) = \varphi_v(w)\}$.

Tutoraufgabe 3

1. Seien L_1 und L_2 rekursiv auflistbare Mengen. Sind die folgenden Mengen L_a und L_b rekursiv auflistbar? Beweisen Sie Ihre Antwort!

   (i) $L_a = L_1 \cup L_2$ (i) $L_b = \{x \mid x \in L_1 \Leftrightarrow x \in L_2\}$

2. Seien $L_n \subseteq A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ rekursiv auflistbar. Zeigen Sie, dass dann

   $$L = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$$

   abzählbar, aber nicht notwendigerweise rekursiv auflistbar ist.

Tutoraufgabe 4

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Rice:

1. $L_1 = \{w \in \Sigma^*\,;\, L(M_w) \text{ ist kontextfrei}\}$ ist unentscheidbar.

2. $L_2 = \{w \in \Sigma^*\,;\, \forall n \in \mathbb{N}.\, \varphi_w(n) = 3n + 5\}$ ist unentscheidbar.

Warum kann man den Satz von Rice auf die folgende Menge nicht anwenden?

3. $L_3 = \{w \in \Sigma^*\,;\, \forall n \in \mathbb{N}.\, \varphi_w(n) = \bot \text{ und } w \text{ ist ein Palindrom}\}$.