Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Übungsblatt 5
12. Mai 2014

Theoretische Informatik

Abgabetermin: 21. Mai 2014, 10 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Streicht man aus einem Wort $w \in \Sigma^*$ an beliebig vielen Stellen einen Buchstaben, so erhält man ein *verstreutes Teilwort* w' *von* w. Formal: $w' = u_1 u_2 \dots u_n$ mit $u_i \in \Sigma^*$ ist ein verstreutes Teilwort von $w = v_0 u_1 v_1 u_2 v_2 \dots v_{n-1} u_n v_n$ mit $v_i \in \Sigma^*$.
Zu jeder Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ definieren wir $sub(L)$ wie folgt:

$$sub(L) = \{w' \,;\, w' \text{ ist ein verstreutes Teilwort eines Worts } w \in L\}\,.$$

Man zeige:

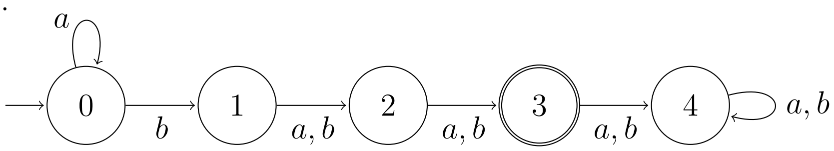
1. Wenn L regulär ist, dann ist $sub(L)$ ebenfalls regulär.
2. Wenn L kontextfrei ist, dann ist $sub(L)$ ebenfalls kontextfrei.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wir definieren für alle $k \in \mathbb{N}$ einen deterministischen endlichen Automat (d. h. DFA) $A_k = (Q_k, \Sigma, \delta_k, 0, \{k\})$ mit $k+2$ Zuständen aus $Q_k = \{0, 1, \dots, k, k+1\} \subset \mathbb{N}_0$. δ_k sei für alle Zustände q mit $1 \le q \le k$ und $x \in \Sigma$ definiert durch

$$\delta_k(0, a) = 0, \quad \delta_k(0, b) = 1, \quad \delta_k(q, x) = q + 1, \quad \delta_k(k + 1, x) = k + 1\,,$$

z. B. für $k = 3$:



1. Zeigen Sie für alle $k \ge 1$, dass der DFA A_k minimal ist für die Sprache $L(A_k)$.

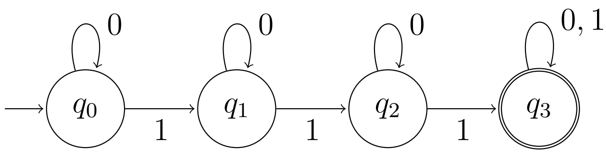
   Hinweis: Zustände i, j mit $i < j$ sind unterscheidbar, falls es ein $w \in \Sigma^*$ gibt, so dass $\hat{\delta}(i, w)$ ein Endzustand ist und gleichzeitig $\hat{\delta}(j, w)$ kein Endzustand ist.

2. Wir betrachten die folgende Aussage: Es gibt eine reguläre Sprache L, so dass die kanonischen (deterministischen) Minimalautomaten für L bzw. für die gespiegelte Sprache L^R nicht die gleiche Anzahl von Zuständen besitzen!

   Begründen Sie mit Hilfe eines geeigneten Beispiels, dass diese Aussage wahr ist.

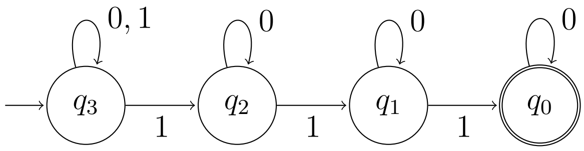
Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Der folgende Übergangsgraph definiert einen deterministischen endlichen Automaten $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_3\})$.



1. Beweisen Sie durch Anwendung eines Minimierungsalgorithmus, dass A minimal ist in dem Sinne, dass für <u>keine</u> zwei verschiedenen Zustände $p, q \in Q$ die Äquivalenzbeziehung $p \equiv_A q$ gilt.

2. Durch geeignete „Spiegelung" gewinnt man aus A den NFA $A^R = (Q, \Sigma, \delta^R, \{q_3\}, \{q_0\})$ wie folgt:



   Definieren Sie ein Verfahren zur Überprüfung der Gleichung $L(A) = L(A^R)$ und begründen Sie dessen Korrektheit.

   Beweisen Sie nun durch Anwendung Ihres Verfahrens die Gleichheit der Sprachen $L(A)$ und $L(A^R)$!

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir betrachten die Grammatik $G = (V, \{a, b\}, P, S)$ mit den Produktionen

$$S \to AB \mid BX\,,$$
$$A \to BA \mid a\,, \qquad B \to XX \mid b\,, \qquad X \to AB \mid b\,.$$

1. Beweisen Sie durch Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus, dass $baabb \in L(G)$ gilt.

   Fertigen Sie dazu ein übersichtliches Protokoll an und lassen Sie genügend Platz für die Eintragung der jeweils relevanten Syntaxbäume von Ableitungen im Sinne von Teilaufgabe 2.

2. Berechnen Sie nun mit einer geeigneten Erweiterung des CYK-Algorithmus alle existierenden verschiedenen Syntaxbäume für Ableitungen des Wortes *baabb*!

   Stellen Sie alle Syntaxbäume für Ableitungen von *baabb* graphisch dar!

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

Berechenbarkeitsbegriffe beruhen auf endlichen Regelsystemen, deren Regeln einzeln effektiv angewendet werden können, um Elemente zu erzeugen bzw. zu benennen. Insgesamt werden dadurch induktiv Mengen dargestellt bzw. erzeugt. Formal werden die erzeugten Mengen als Durchschnitt aller Mengen dargestellt, die in gewissem Sinne abgeschlossen sind gegenüber der Erzeugung von Elementen.

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein Tupel von Mengen $X_1, X_2 \subseteq \Sigma^*$ mit $\Sigma = \{a, b\}$. Wir betrachten das folgende Regelsystem H mit drei Implikationen.

$$H: \quad \begin{array}{ll} (1) & \mathit{true} \implies aa \in X_1\,, \\ (2) & x \in X_2 \implies xa \in X_1\,, \\ (3) & x \in X_1 \implies ax \in X_2\,. \end{array}$$

Das Tupel $X = (X_1, X_2)$ heißt H-abgeschlossen, falls die Implikationen (1), (2) und (3) gelten.

1. Seien I eine nicht leere Indexmenge und $Y = (Y_i)_{i \in I}$ eine Familie von H-abgeschlossenen Mengentupeln $Y_i = (X_{i,1}, X_{i,2})$. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt

$$\bigcap Y = \left(\bigcap_{i\in I} Y_{i,1}, \bigcap_{i\in I} Y_{i,2} \right)\,.$$

   ebenfalls H-abgeschlossen ist.
2. Zeigen Sie, dass es zu jedem Tupel $A = (A_1, A_2)$ ein kleinstes H-abgeschlossenes Tupel A^H gibt, so dass $A \subseteq A^H$. Dabei sei die Mengeninklusion komponentenweise auf 2-Tupel erweitert. A^H heißt dann die H-abgeschlossene Hülle von A oder die von A erzeugte H-abgeschlossene Menge.
3. Seien $(L_1, L_2) = (\emptyset, \emptyset)^H$. Beweisen Sie induktiv mit Hilfe der H-Abgeschlossenheit, dass alle Wörter in L_1 aus einer geraden Anzahl von Buchstaben a bestehen.
4. Eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ sei durch folgende Produktionen gegeben.

$$\begin{array}{rcl} S & \to & aa \mid Ba\,, \\ B & \to & aS\,. \end{array}$$

   Sei $(L_1, L_2) = (\emptyset, \emptyset)^H$. Zeigen Sie $L_G = L_1$.

Bemerkung: Das Regelsystem H und die Grammatik G entsprechen sich in kanonischer Weise.

Vorbereitung 2

Gegeben sei der Kellerautomat $K = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta)$ mit $\Sigma = \{a, b, \#\}$, $\Gamma = \{Z_0, X, Y, Z\}$ und der Übergangsfunktion

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} \delta(q, \epsilon, Z_0) & = & \{(q, XZ)\}\,, & \delta(q, a, X) & = & \{(q, XY)\}\,, \\ \delta(q, \#, X) & = & \{(q, \epsilon)\}\,, & \delta(q, b, Y) & = & \{(q, \epsilon)\}\,, \\ \delta(q, a, Z) & = & \{(q, \epsilon)\}\,. & & & \end{array}$$

1. Geben Sie eine Berechnung als Konfigurationsfolge an, die zeigt, dass K das Wort $a\#ba$ mit leerem Keller akzeptiert, d. h., dass $a\#ba \in L_\epsilon(K)$ gilt.
2. Modifizieren Sie die Übergangsfunktion δ so zu einer Funktion δ', dass für den Kellerautomaten $K' = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta')$ gilt: $L_\epsilon(K') = (L_\epsilon(K))^*$.

Tutoraufgabe 1

Sei $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Finden Sie eine Grammatik G, so dass $L(G) = \{w \in \Sigma^* \, ; \, \#_a(w) = 2 \cdot \#_b(w)\}$.
2. Zeigen Sie die Korrektheit Ihrer Grammatik, d.h., zeigen Sie, dass für alle ableitbaren Wörter $w \in L(G)$ die Beziehung $\#_a(w) = 2 \cdot \#_b(w)$ gilt.
3. Zeigen Sie, dass alle Wörter $(ab)^n a^n$ für $n \geq 0$ in Ihrer Grammatik G ableitbar sind.

Tutoraufgabe 2

Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von Ogden, dass die Sprache

$$L = \{a^n b^n c^i \, ; \, i, n \in \mathbb{N}, i \neq n\}$$

nicht kontextfrei ist.

Tutoraufgabe 3

Überführen Sie die folgende Grammatik in Greibach-Normalform:

$$G = (\{S, X\}, \{a, b\}, \{S \to XX, S \to a, X \to SS, X \to b\}, X)\,.$$

Tutoraufgabe 4

Konstruieren Sie für die folgende Sprache L einen Kellerautomaten, der L durch Endzustände akzeptiert.

$$L = \{a^n b^{4n} \, ; \, n \in \mathbb{N}_0\}\,.$$