Übung 3: Reguläre Ausdrücke und Minimalautomaten

Theoretische Informatik Sommersemester 2014

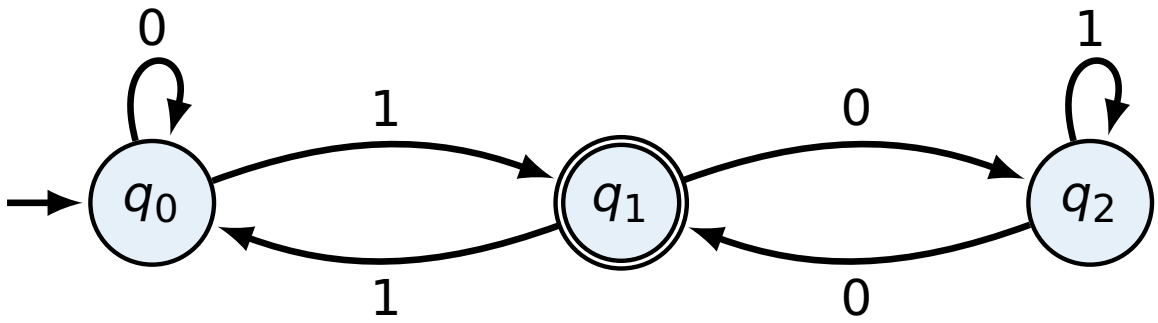
Markus Kaiser

5. Mai 2014

Definition (Deterministischer endlicher Automat)

Ein DFA ist ein Tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ aus einer/einem

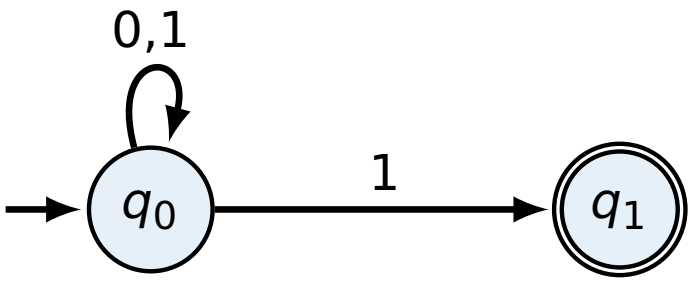
- endlichen Menge von Zuständen Q
- endlichen Eingabealphabet Σ
- totalen Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \to Q$
- Startzustand $q_0 \in Q$
- Menge von Endzuständen $F \subseteq Q$



Definition (Nicht-Deterministischer endlicher Automat)

Ein NFA ist ein Tupel $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ mit

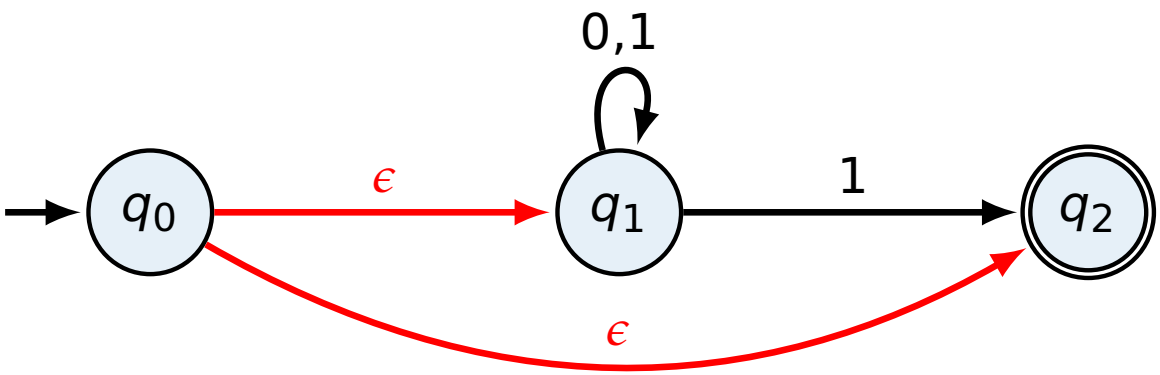
- Q, Σ, F wie ein DFA
- Menge von Startzuständen $S \subseteq F$
- Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$



Definition (NFA mit ϵ-Übergängen)

Ein ϵ-NFA ist ein Tupel $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ mit

- Q, Σ, F wie ein DFA
- Menge von Startzuständen $S \subseteq F$
- Übergangsfunktion $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$



Definition (Regulärer Ausdruck)

Reguläre Ausdrücke sind induktiv definiert

- $\emptyset$ ist ein regulärer Ausdruck
- ϵ ist ein regulärer Ausdruck
- Für alle $a \in \Sigma$ ist a ein regulärer Ausdruck
- Sind α und β reguläre Ausdrücke, dann auch

  Konkatenation $\alpha\beta$
  Veroderung $\alpha \mid \beta$
  Wiederholung α^*

Analoge Sprachdefinition, z.b. $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$

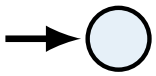
Beispiel

- $\alpha = (0|1)^*00$
- Worte bestehen aus einer beliebigen Folge von Einsen und Nullen gefolgt von zwei Nullen.
- $L(\alpha) \supseteq \{x \mid x \text{ Binärzahl}, x \mod 4 = 0\}$

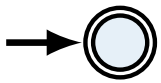
Thompson-Konstruktion

Für einen Ausdruck γ wird rekursiv mit struktureller Induktion ein ϵ-NFA konstruiert.

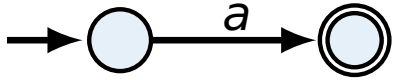
$\gamma = \emptyset$



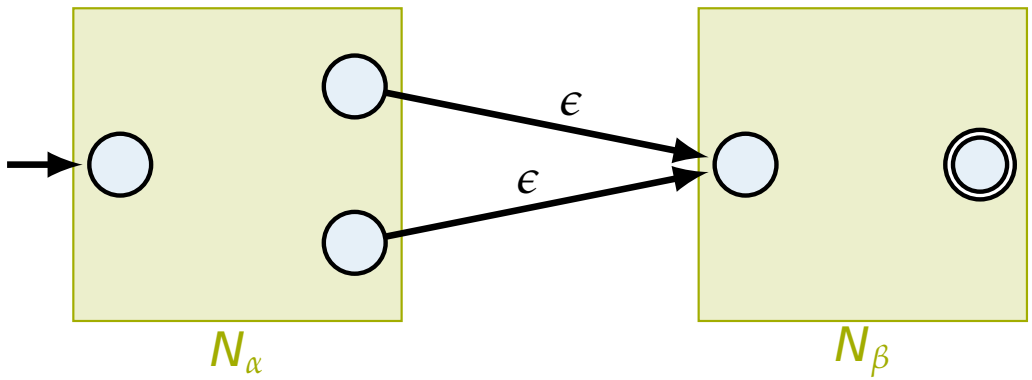
$\gamma = \epsilon$



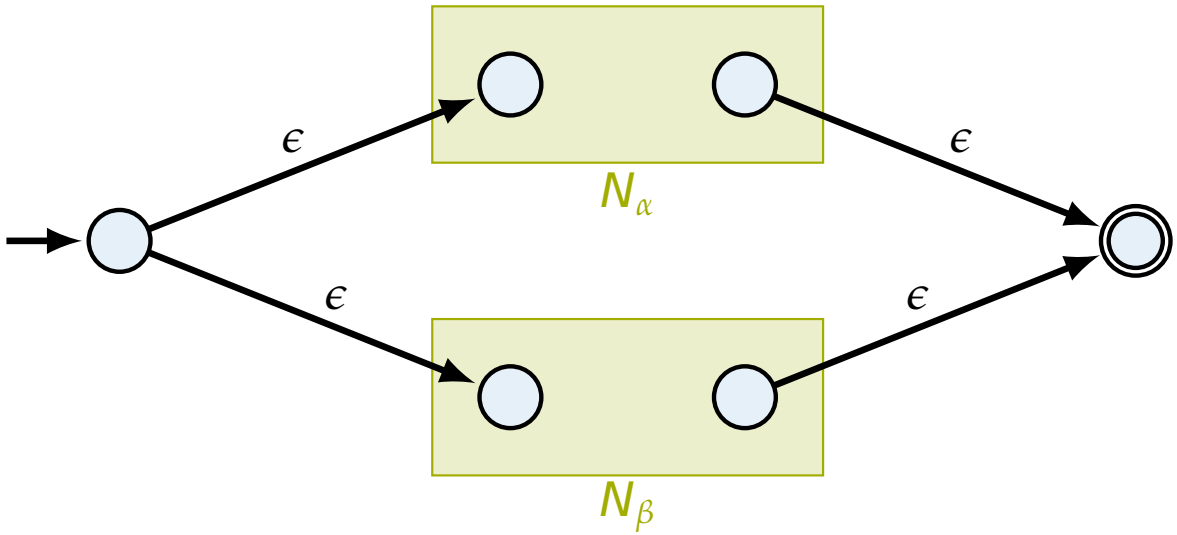
$\gamma = a \in \Sigma$



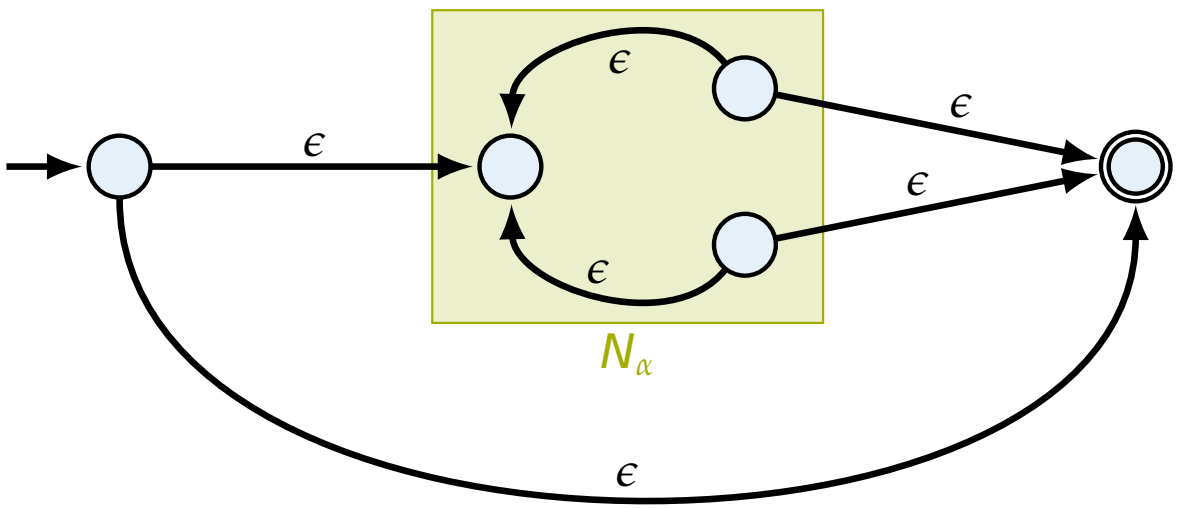
$\gamma = \alpha\beta$



$\gamma = \alpha \mid \beta$



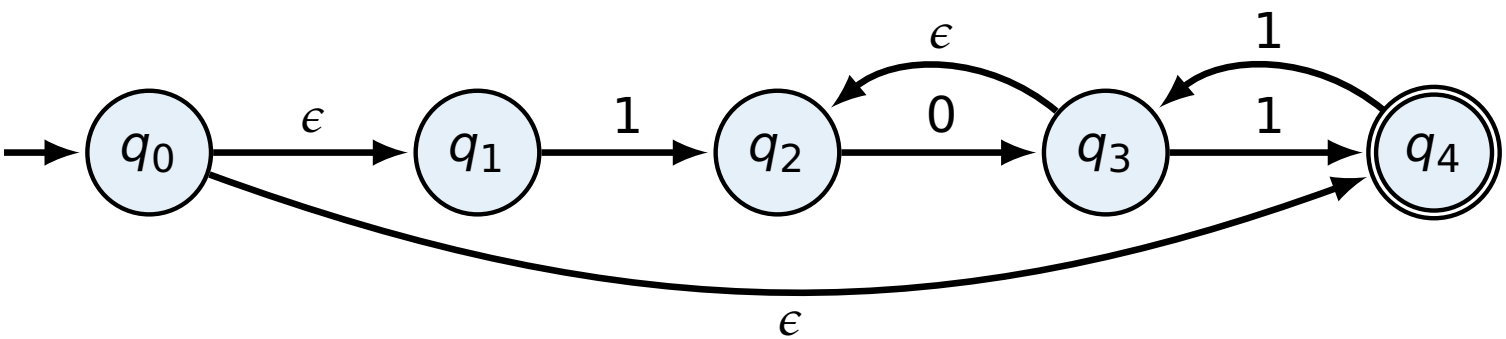
$\gamma = \alpha^*$



Idee

Entferne ϵ-Kanten durch das Bilden von ϵ-Hüllen.

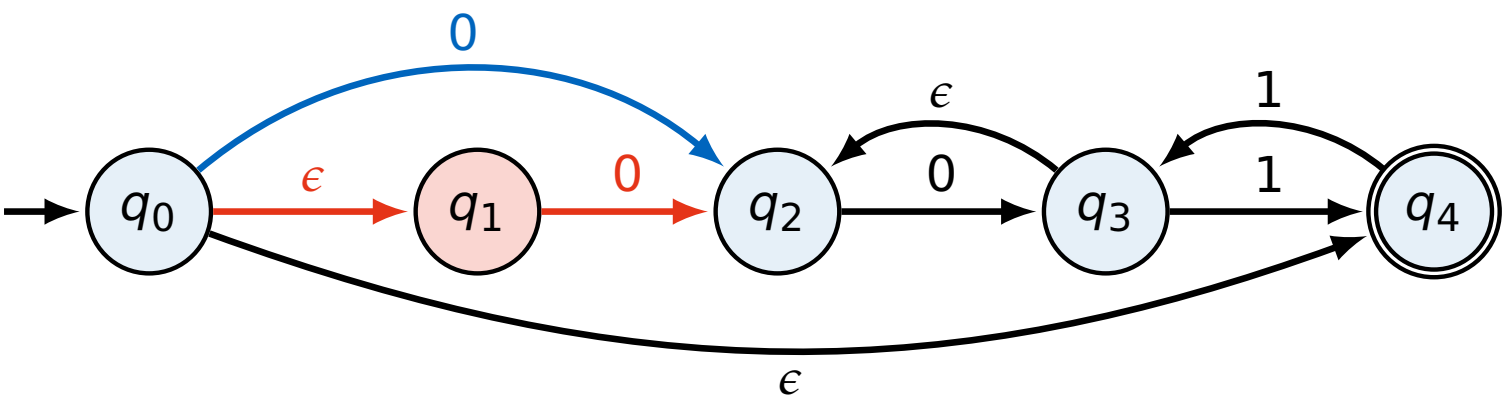
1. Entferne unnötige Knoten.
2. Für jeden Pfad der Form $\epsilon \ldots \epsilon a \epsilon \ldots \epsilon$ verbinde Anfangs- und Endknoten mit einer a-Kante.
3. Entferne alle ϵ-Kanten und unerreichbare Knoten.
4. Wurde das leere Wort akzeptiert mache den Anfangszustand zum Endzustand.



Idee

Entferne ϵ-Kanten durch das Bilden von ϵ-Hüllen.

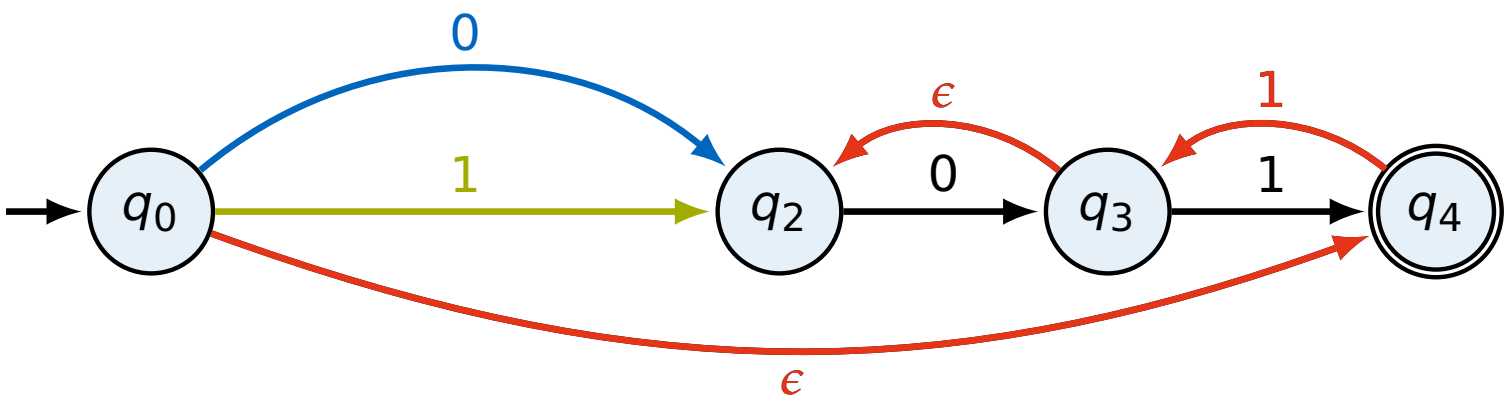
1. Entferne unnötige Knoten.
2. Für jeden Pfad der Form $\epsilon \ldots \epsilon a \epsilon \ldots \epsilon$ verbinde Anfangs- und Endknoten mit einer a-Kante.
3. Entferne alle ϵ-Kanten und unerreichbare Knoten.
4. Wurde das leere Wort akzeptiert mache den Anfangszustand zum Endzustand.



Idee

Entferne ϵ-Kanten durch das Bilden von ϵ-Hüllen.

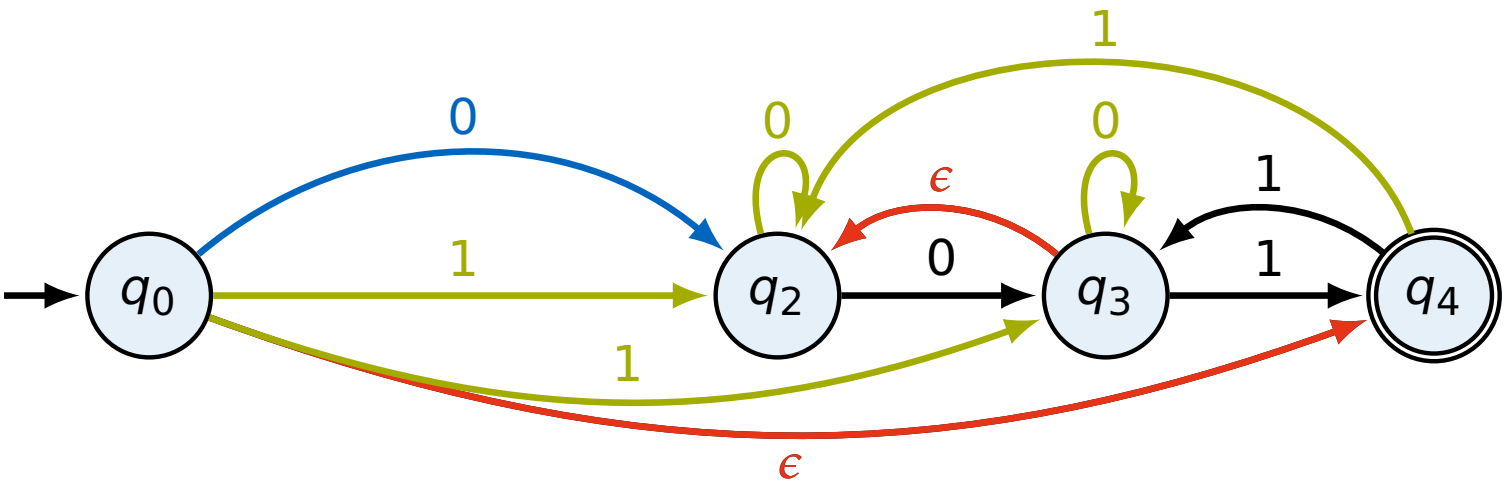
1. Entferne unnötige Knoten.
2. Für jeden Pfad der Form $\epsilon \ldots \epsilon a \epsilon \ldots \epsilon$ verbinde Anfangs- und Endknoten mit einer a-Kante.
3. Entferne alle ϵ-Kanten und unerreichbare Knoten.
4. Wurde das leere Wort akzeptiert mache den Anfangszustand zum Endzustand.



Idee

Entferne ϵ-Kanten durch das Bilden von ϵ-Hüllen.

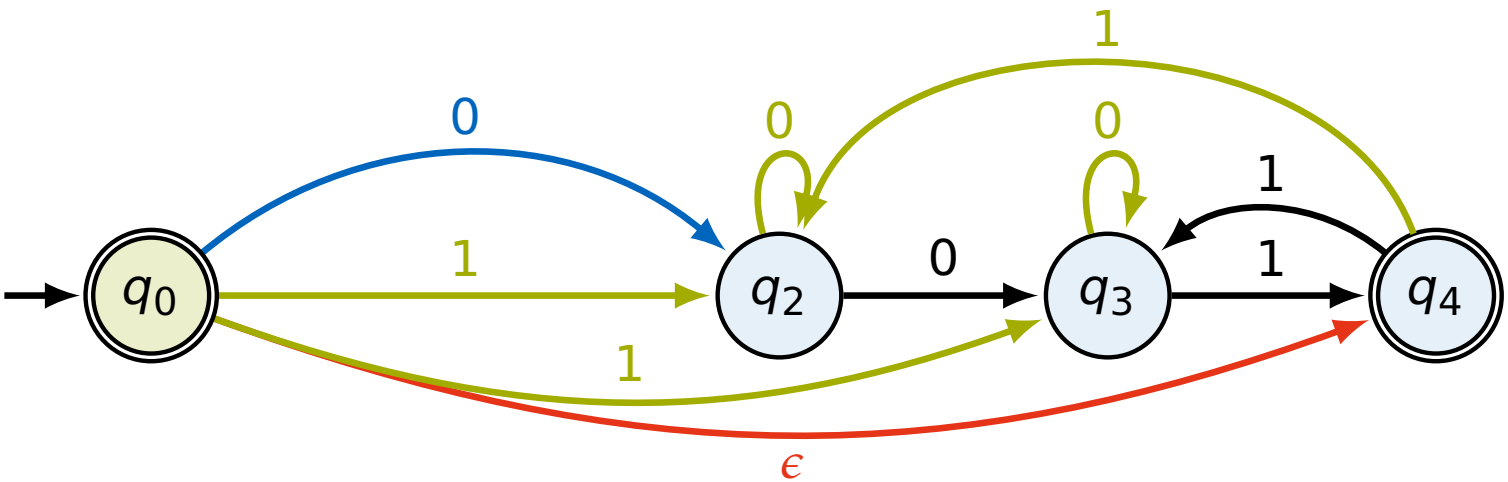
1. Entferne unnötige Knoten.
2. Für jeden Pfad der Form $\epsilon \ldots \epsilon a \epsilon \ldots \epsilon$ verbinde Anfangs- und Endknoten mit einer a-Kante.
3. Entferne alle ϵ-Kanten und unerreichbare Knoten.
4. Wurde das leere Wort akzeptiert mache den Anfangszustand zum Endzustand.



Idee

Entferne ϵ-Kanten durch das Bilden von ϵ-Hüllen.

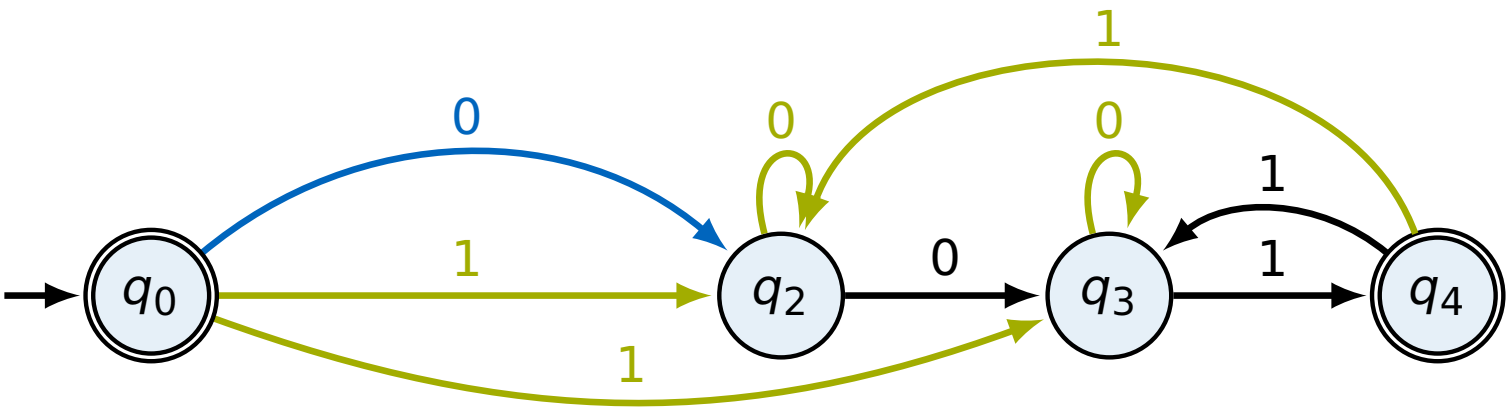
1. Entferne unnötige Knoten.
2. Für jeden Pfad der Form $\epsilon \ldots \epsilon a \epsilon \ldots \epsilon$ verbinde Anfangs- und Endknoten mit einer a-Kante.
3. Entferne alle ϵ-Kanten und unerreichbare Knoten.
4. Wurde das leere Wort akzeptiert mache den Anfangszustand zum Endzustand.



Idee

Entferne ϵ-Kanten durch das Bilden von ϵ-Hüllen.

1. Entferne unnötige Knoten.
2. Für jeden Pfad der Form $\epsilon \ldots \epsilon a \epsilon \ldots \epsilon$ verbinde Anfangs- und Endknoten mit einer a-Kante.
3. Entferne alle ϵ-Kanten und unerreichbare Knoten.
4. Wurde das leere Wort akzeptiert mache den Anfangszustand zum Endzustand.



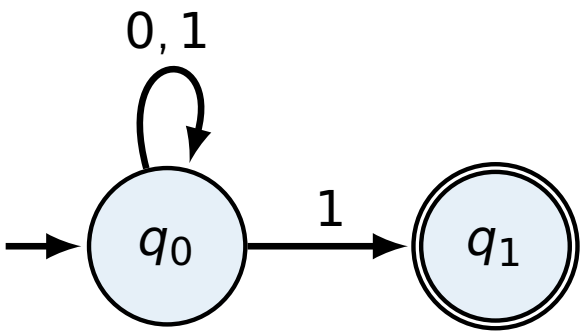
Potenzmengenkonstruktion

Konstruiere einen Automaten, der alle möglichen Pfade gleichzeitig berücksichtigt. Gegeben ein NFA $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$, konstruiere einen DFA mit Zuständen aus $\mathcal{P}(Q)$.

- Starte in $\{S\}$
- Die Übergangsfunktion speichert alle möglichen Schritte

$$\overline{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$
$$(M, a) \mapsto \bigcup_{q \in M} \delta(q, a)$$

- M ist Endzustand wenn $F \cap M \neq \emptyset$



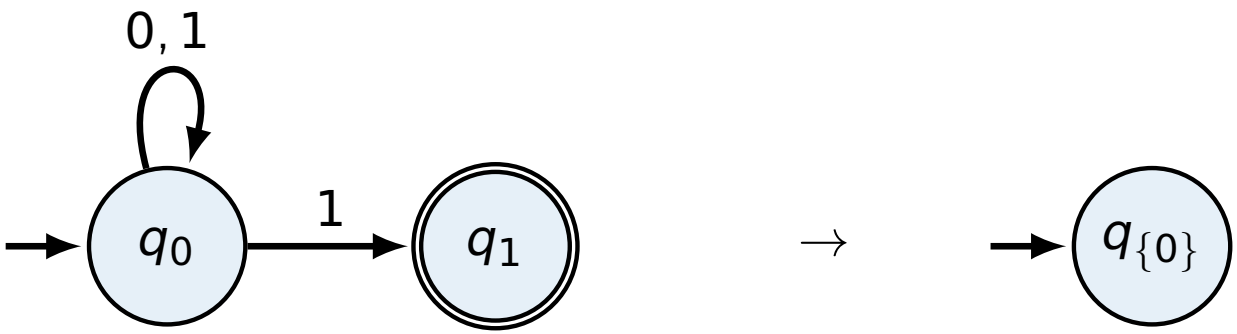
Potenzmengenkonstruktion

Konstruiere einen Automaten, der alle möglichen Pfade gleichzeitig berücksichtigt. Gegeben ein NFA $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$, konstruiere einen DFA mit Zuständen aus $\mathcal{P}(Q)$.

- Starte in $\{S\}$
- Die Übergangsfunktion speichert alle möglichen Schritte

$$\overline{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$
$$(M, a) \mapsto \bigcup_{q \in M} \delta(q, a)$$

- M ist Endzustand wenn $F \cap M \neq \emptyset$



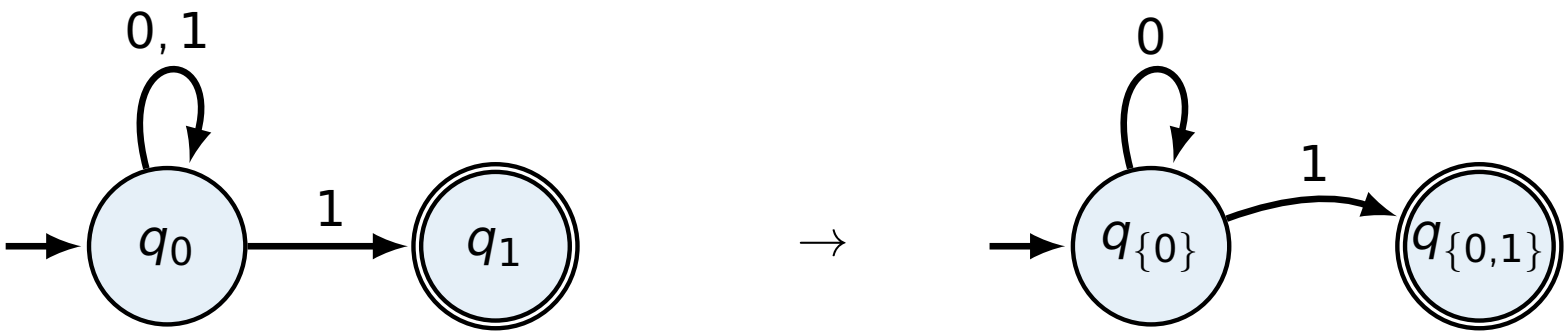
Potenzmengenkonstruktion

Konstruiere einen Automaten, der alle möglichen Pfade gleichzeitig berücksichtigt. Gegeben ein NFA $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$, konstruiere einen DFA mit Zuständen aus $\mathcal{P}(Q)$.

- Starte in $\{S\}$
- Die Übergangsfunktion speichert alle möglichen Schritte

$$\overline{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$
$$(M, a) \mapsto \bigcup_{q \in M} \delta(q, a)$$

- M ist Endzustand wenn $F \cap M \neq \emptyset$



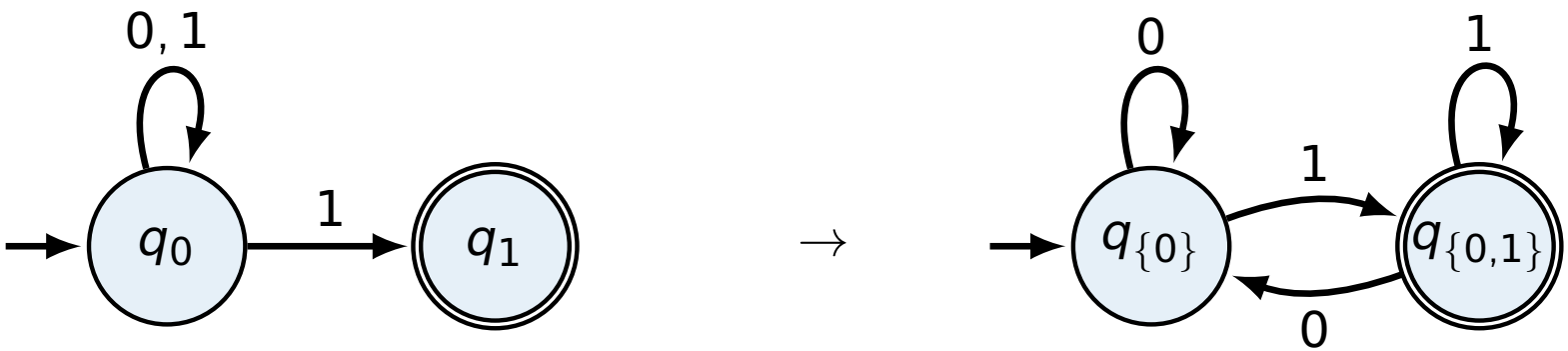
Potenzmengenkonstruktion

Konstruiere einen Automaten, der alle möglichen Pfade gleichzeitig berücksichtigt. Gegeben ein NFA $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$, konstruiere einen DFA mit Zuständen aus $\mathcal{P}(Q)$.

- Starte in $\{S\}$
- Die Übergangsfunktion speichert alle möglichen Schritte

$$\overline{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$
$$(M, a) \mapsto \bigcup_{q \in M} \delta(q, a)$$

- M ist Endzustand wenn $F \cap M \neq \emptyset$



Äquivalenzen

Definition (Äquivalente Worte)

Jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ induziert eine Äquivalenzrelation $\equiv_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$

$$u \equiv_L v \iff (\forall w \in \Sigma^*. uw \in L \Leftrightarrow vw \in L)$$

Definition (Äquivalente Zustände)

Zwei Zustände im DFA A sind äquivalent wenn sie die selbe Sprache akzeptieren.

$$p \equiv_A q \iff \left(\forall w \in \Sigma^*. \hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \in F\right)$$

Äquivalenzen

Definition (Äquivalente Worte)

Jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ induziert eine Äquivalenzrelation $\equiv_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$

$$u \equiv_L v \iff (\forall w \in \Sigma^*. uw \in L \Leftrightarrow vw \in L)$$

Definition (Äquivalente Zustände)

Zwei Zustände im DFA A sind äquivalent wenn sie die selbe Sprache akzeptieren.

$$p \equiv_A q \iff \left(\forall w \in \Sigma^*. \hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \in F\right)$$

Unterscheidbare Zustände

Definition (Unterscheidbarkeit)

Zwei Zustände sind unterscheidbar, wenn sie unterschiedliche Sprachen akzeptieren.

$$p \not\equiv_A q \iff \left(\exists w \in \Sigma^*.\hat{\delta}(p,w) \in F \wedge \hat{\delta}(q,w) \notin F\right)$$

Satz

Sind $\delta(p,a)$ und $\delta(q,a)$ unterscheidbar, dann auch p und q.

Unterscheidbare Zustände

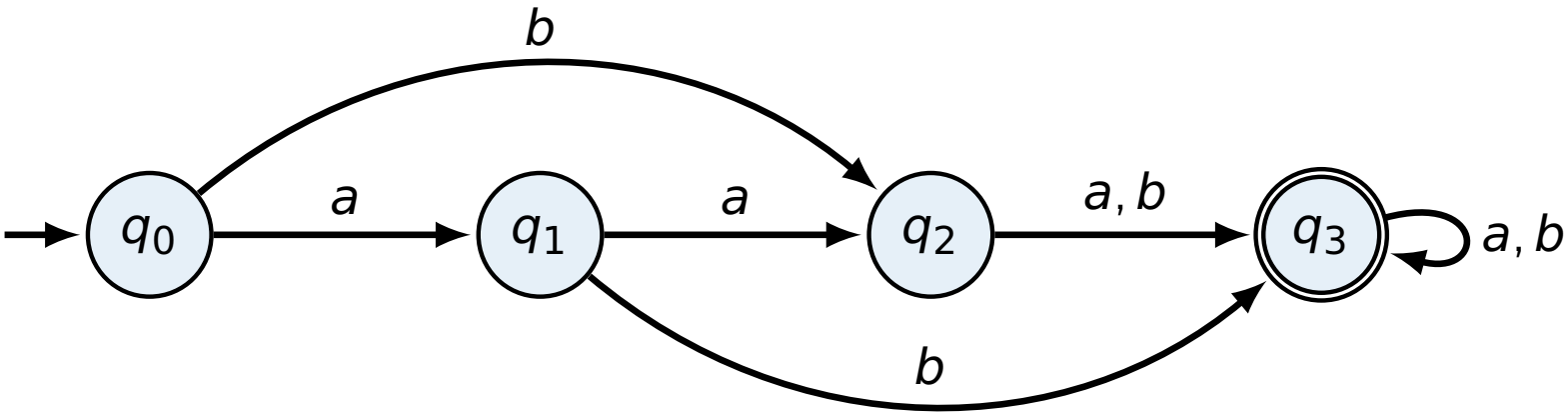
Definition (Unterscheidbarkeit)

Zwei Zustände sind unterscheidbar, wenn sie unterschiedliche Sprachen akzeptieren.

$$p \not\equiv_A q \iff \left(\exists w \in \Sigma^*.\hat{\delta}(p,w) \in F \wedge \hat{\delta}(q,w) \notin F\right)$$

Satz

Sind $\delta(p,a)$ und $\delta(q,a)$ unterscheidbar, dann auch p und q.



Unterscheidbare Zustände

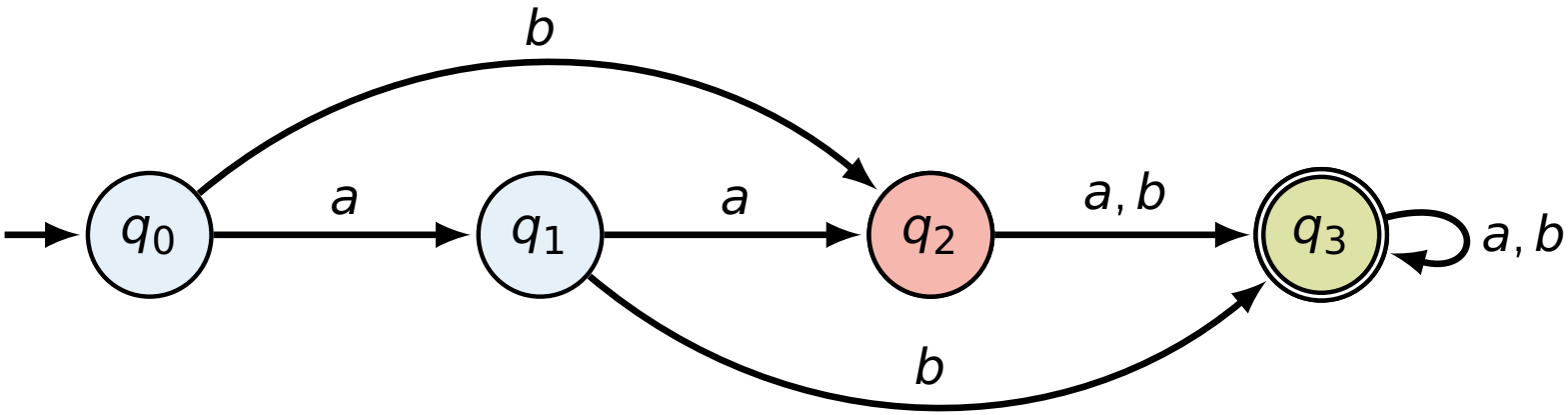
Definition (Unterscheidbarkeit)

Zwei Zustände sind unterscheidbar, wenn sie unterschiedliche Sprachen akzeptieren.

$$p \not\equiv_A q \iff \left(\exists w \in \Sigma^*.\hat{\delta}(p,w) \in F \wedge \hat{\delta}(q,w) \notin F\right)$$

Satz

Sind $\delta(p,a)$ und $\delta(q,a)$ unterscheidbar, dann auch p und q.



Unterscheidbare Zustände

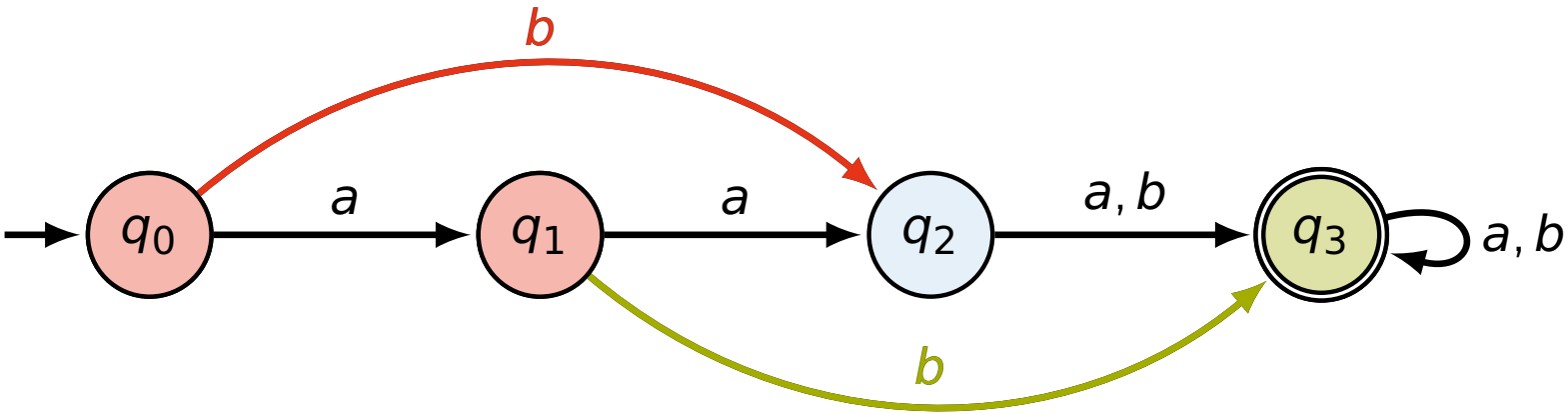
Definition (Unterscheidbarkeit)

Zwei Zustände sind unterscheidbar, wenn sie unterschiedliche Sprachen akzeptieren.

$$p \not\equiv_A q \iff \left(\exists w \in \Sigma^*.\hat{\delta}(p,w) \in F \wedge \hat{\delta}(q,w) \notin F\right)$$

Satz

Sind $\delta(p,a)$ und $\delta(q,a)$ unterscheidbar, dann auch p und q.



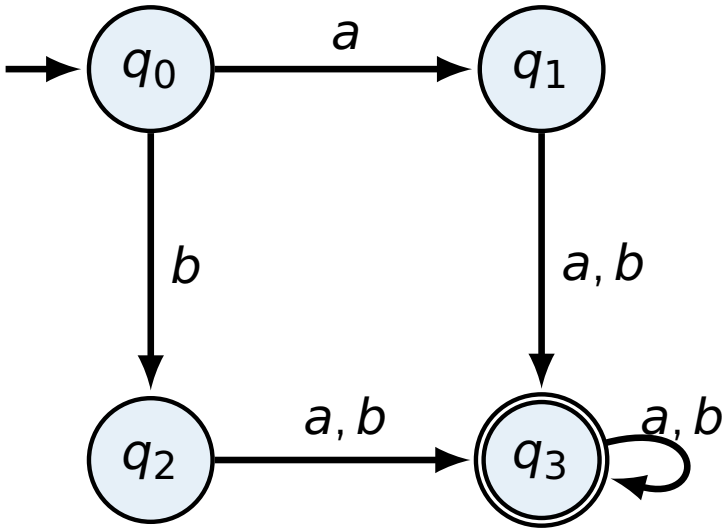
DFA minimieren

Quotientenautomat

1. Entferne alle von q_0 nicht erreichbaren Zustände
2. Berechne die unterscheidbaren Zustände
3. Kollabiere die äquivalenten Zustände

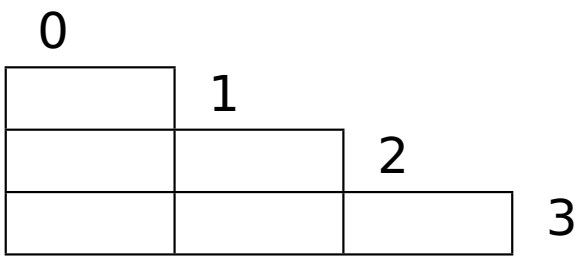
Quotientenautomat

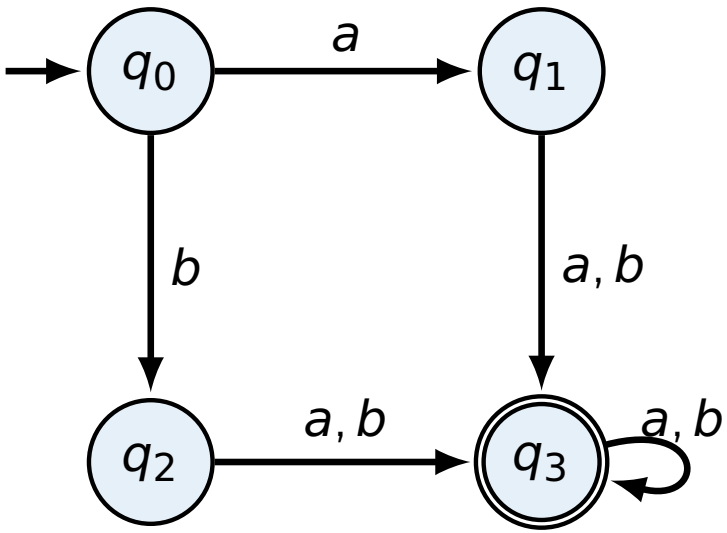
1. Entferne alle von q_0 nicht erreichbaren Zustände
2. Berechne die unterscheidbaren Zustände
3. Kollabiere die äquivalenten Zustände



Quotientenautomat

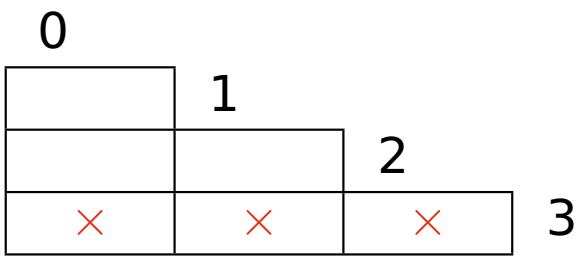
1. Entferne alle von q_0 nicht erreichbaren Zustände
2. Berechne die unterscheidbaren Zustände
3. Kollabiere die äquivalenten Zustände

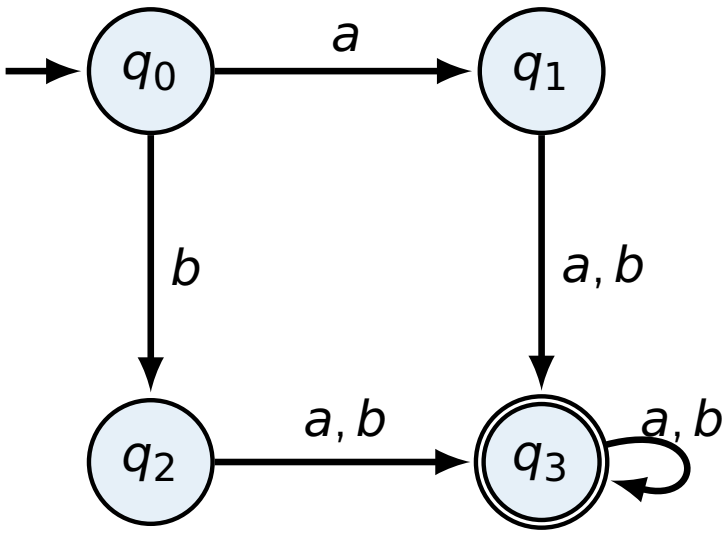




Quotientenautomat

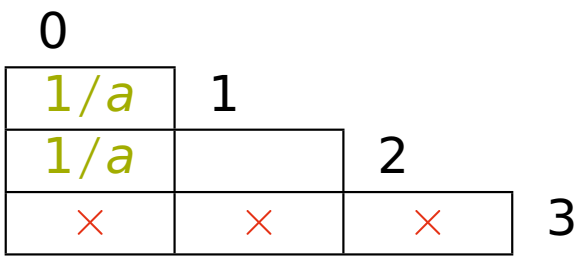
1. Entferne alle von q_0 nicht erreichbaren Zustände
2. Berechne die unterscheidbaren Zustände
3. Kollabiere die äquivalenten Zustände

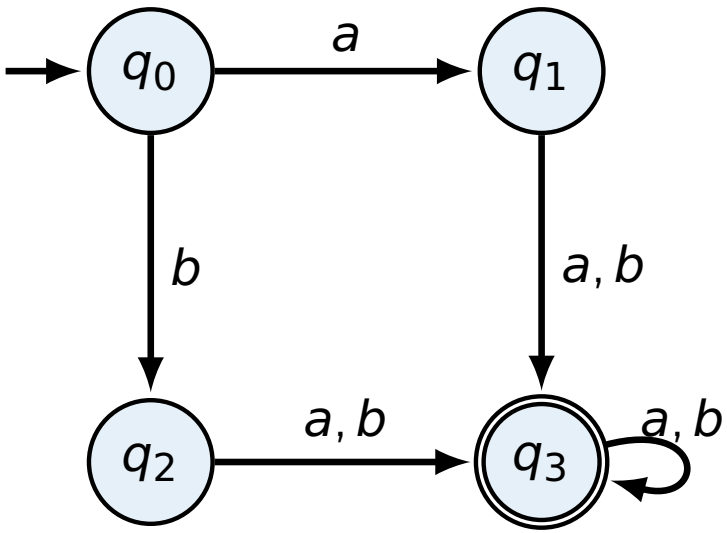




Quotientenautomat

1. Entferne alle von q_0 nicht erreichbaren Zustände
2. Berechne die unterscheidbaren Zustände
3. Kollabiere die äquivalenten Zustände





Quotientenautomat

1. Entferne alle von q_0 nicht erreichbaren Zustände
2. Berechne die unterscheidbaren Zustände
3. Kollabiere die äquivalenten Zustände