Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Übungsblatt 2
15. April 2014

Theoretische Informatik

Abgabetermin: 30. April 2014, 10 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Seien Σ ein Alphabet und A eine formale Sprache über Σ.

1. Zeigen Sie: $A^* = A^+ \Leftrightarrow \epsilon \in A$. (Beachten Sie: $A^+ = AA^*$.)
2. Zeigen Sie: $AA \subseteq A \;\Leftrightarrow\; A = A^+$.
3. Zeigen Sie: $A \subseteq AA \;\Leftrightarrow\; \epsilon \in A$.

Bemerkung: In algebraischer Sprechweise heißt A *abgeschlossen* bezüglich der Konkatenation $\circ$, falls $AA \subseteq A$ gilt, und A ist in diesem Fall eine Unterhalbgruppe von $(\Sigma^*, \circ)$. Entsprechend ist A^+ die *von A erzeugte Halbgruppe* (oder Unterhalbgruppe). Falls $AA \subseteq A$ und $\epsilon \in A$ gelten, heißt A ein *Untermonoid* von $(\Sigma^*, \circ)$. A^* ist das *von A erzeugte Monoid* (oder Untermonoid).

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $\Sigma = \{(,)\}$ ein Alphabet, bestehend aus einer öffnenden bzw. schließenden Klammer. Sei $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik mit Axiom S und den Produktionen

$$S \underset{P}{\rightarrow} \epsilon\,, \qquad S \underset{P}{\rightarrow} (S)\,, \qquad S \underset{P}{\rightarrow} SS\,.$$

1. Konstruieren Sie nach Lemma 12 der Vorlesung eine kontextfreie Grammatik $G' = (V', \Sigma, P', S)$, die $L(G)$ erzeugt.
2. Zeigen Sie, dass es für $z' = ()(())$ eine Ableitung von S in G' der Länge 10 gibt.
3. Weisen Sie nach, dass $w = ())($ nicht in $L(G')$ liegt, indem Sie nach Lemma 20 für hinreichend großes m die Folge der Mengen T^4_m der in m Schritten aus S ableitbaren Wörter w der Länge höchstens 4 in extensionaler Form bestimmen und die Aussage $w \notin T^4_m$ berechnen.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Seien $G_1 = (V_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$ und $G_2 = (V_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$ Grammatiken des gleichen Typs $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

1. Geben Sie eine Grammatik G vom gleichen Typ wie G_1 an, so dass gilt
$$L(G) = L(G_1) \cup \{\epsilon\}.$$
2. Geben Sie eine Grammatik H vom gleichen Typ wie G_1 an, so dass gilt
$$L(H) = L(G_1) \cup L(G_2).$$

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Für Zwecke dieser Aufgabe nennen wir eine Produktion $\epsilon \to \alpha$ einer Grammatik mit einer beliebigen Wortform α als rechter Seite eine *freie* Produktion. Wir betrachten die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S) = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to \epsilon, \epsilon \to abaabb\}, S)$.

1. Geben Sie eine Grammatik $G' = (V', \Sigma', P', S')$ an, die äquivalent ist mit G im Sinne der Gleichheit der erzeugten Sprachen, also $L(G') = L(G)$, so dass in P' keine freien Produktionen existieren.

2. Entwerfen Sie ein Verfahren, das jeder Grammatik G eine äquivalente Grammatik G' ohne freie Produktionen zuordnet.

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

Eine Grammatik G sei gegeben in BNF-Form durch

$$S \to a\,S\,d\,d, \qquad\qquad S \to \{b\} \mid \{c\}.$$

Geben Sie G als kontextfreie Grammatik $G = (V, \{a, b, c, d\}, P, S)$ an.

Vorbereitung 2

Gegeben sind folgende Grammatiken:

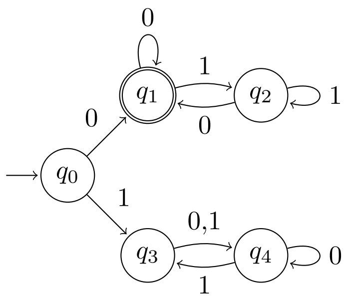
$G_1 := (\{S\},\ \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{+}, \mathtt{(}, \mathtt{)}\},\ \{S \to \mathtt{a},\ S \to \mathtt{b},\ S \to S\mathtt{+}S,\ S \to \mathtt{(}S\mathtt{)}\},\ S)$,

$G_2 := (\{S\},\ \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{+}, \mathtt{(}, \mathtt{)}\},\ \{S \to \mathtt{a},\ S \to \mathtt{b},\ S \to \mathtt{a+}S,\ S \to \mathtt{b+}S,\ S \to \mathtt{(}S\mathtt{)}\},\ S)$.

1. Ordnen Sie die Grammatiken in die Chomsky-Hierarchie ein.
2. Geben Sie jeweils einen Ableitungsbaum für das Wort `a+(b+a)` an.
3. Gilt $L(G_1) = L(G_2)$?

Vorbereitung 3

Wir betrachten einen endlichen deterministischen Automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, der durch die folgende Grafik gegeben ist.



1. Übersetzen Sie die Grafik in eine extensionale Mengenschreibweise (Darstellung durch Auflistung) für Q, Σ, δ und F.
2. Bestimmen Sie $\delta(\delta(q_1, 0), 1)$ und $\hat{\delta}(q_0, 10)$!
3. Geben Sie ein möglichst einfaches Kriterium an, mit dem man entscheiden kann, ob ein Wort $w \in \Sigma^*$ von A akzeptiert wird.

Vorbereitung 4

Geben Sie jeweils einen endlichen Automat (als Graph und Übergangsrelation) an, der über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ folgende Sprache akzeptiert:

1. Die Menge aller Wörter, die das Teilwort 1110 enthalten.
2. Die Menge aller Wörter, bei denen die Anzahl der Einsen durch 3 teilbar ist.
3. Die Menge aller Wörter, die mit 10 beginnen und auf 01 enden.

Tutoraufgabe 1

Wir beziehen uns auf die in der Vorbereitungsaufgabe 2 definierten Grammatiken G_1 und G_2.

1. Zeigen Sie: Für alle $w_1, w_2 \in L(G_1)$ ist auch $(w_1{+}w_2) \in L(G_1)$.

   Gilt diese Aussage auch für G_2?

2. Sind die Grammatiken G_1 bzw. G_2 eindeutig?

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten die Sprache L aller Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, die entweder mit 1 beginnen und gleichzeitig mit 1 enden oder die mit 0 beginnen und gleichzeitig mit 0 enden.

1. Geben Sie einen deterministischen endlichen Automat (DFA) an, der L akzeptiert und zeigen Sie, dass es unendlich viele DFA gibt, die L akzeptieren.

2. Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automat (NFA) mit höchstens 4 Zuständen an, der L akzeptiert.

Tutoraufgabe 3

Sei $\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$ die Zeichenmenge der Ziffern von 0 bis 3. Sei Q die Sprache der Zahldarstellungen zur Basis 4 ohne führende Nullen. (Beispiel: $0 \in Q,\ 2013 \in Q,\ 02013 \notin Q$. Es gilt $\#_4 2013 = 2 \cdot 4^3 + 4^1 + 3 \cdot 4^0 = \#_{10} 135$.)

Sei $L = \{w \in Q \mid \#w \bmod 3 = 2\}$.

1. Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automat A, der L akzeptiert.

2. Beweisen Sie, dass A die Sprache L akzeptiert, d. h., dass $L(A) = L$ gilt.

Tutoraufgabe 4

Wir betrachten einen nichtdeterministischen Automaten

$$N = (Q, \Sigma, \delta, S, F) = (\{s_0, s_1\}, \{a, b\}, \delta, \{s_0\}, \{s_1\})$$

mit $\delta(s_0, a) = \{s_1\}$ und $\delta(q, x) = \emptyset$ für $(q, x) \neq (s_0, a)$.

1. Konstruieren Sie mit dem Myhill-Verfahren einen endlichen deterministischen Automaten M, für den $L(M) = L(N)$ gilt.

2. Konstruieren Sie nach Vorlesungsmethodik eine reguläre Grammatik G mit $L(G) = L(M)$.