Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Übungsblatt 8
2. Juni 2014

Theoretische Informatik

Abgabetermin: 18. Juni 2014, 10 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Sei Σ eine nicht leere Zeichenmenge.

1. Sei L die Menge aller Wörter über Σ mit geradzahliger Länge. Geben Sie ein Verfahren an, das für einen beliebigen DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ entscheidet, ob jedes (oder nicht jedes) von A akzeptierte Wort eine ungerade Länge besitzt.

2. Sei $E(x)$ ein Eigenschaft für Wörter x über Σ, so dass $K = \{x\,;\, E(x)\}$ eine reguläre Sprache ist. Verallgemeinern Sie Ihr obiges Verfahren so, dass es für einen beliebigen DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ entscheidet, ob jedes (oder nicht jedes) von A akzeptierte Wort x die Eigenschaft E besitzt.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Konstruieren Sie für die folgenden Sprachen jeweils einen Kellerautomaten, der die Sprache erkennt.

(a) $L_1 = \{a^n b^{3n}\ ;\ n \in \mathbb{N}_0\}$

(b) $L_2 = \{wc\widehat{w}\ ;\ w \in \Sigma^*\}$ wobei $\widehat{w}$ das zu w gespiegelte Wort und $\Sigma = \{a, b\}$ ist.

(c) $L_3 = \{w\widehat{w}\ ;\ w \in \Sigma^*\}$ wobei $\widehat{w}$ das zu w gespiegelte Wort und $\Sigma = \{a, b\}$ ist.

Geben Sie – wenn möglich – einen deterministischen Kellerautomaten an.

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $L = \{a^i b^j c^k\,;\, i = j \text{ oder } j = k\}$ und $L' := \overline{L} \cap a^* b^* c^*$.

1. Zeigen Sie mit Hilfe von Ogden's Lemma, dass L' nicht kontextfrei ist.

2. Zeigen Sie, dass L nicht deterministisch kontextfrei ist.

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie:
<u>Wenn L_1 kontextfrei ist und L_2 regulär, dann ist $L_1 \cap L_2$ kontextfrei.</u>
Hinweis: Konstruieren sie aus einem PDA und einem DFA/NFA einen neuen PDA.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass es für jeden Kellerautomaten einen äquivalenten Kellerautomaten mit nur <u>einem Zustand</u> gibt.

Zusatzaufgabe 5 (wird nicht korrigiert)

Ein 2-Kellerautomat $K = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, Z_0', F)$ ist ein Kellerautomat, der über einen zweiten Keller verfügt. Der zweite Keller wird mit Z_0' initialisiert. Die Übergangsfunktion $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \times \Gamma \to \mathcal{P}_e(Q \times \Gamma^* \times \Gamma^*)$ beschreibt die Vorgehensweise des 2-KA wie folgt ($\mathcal{P}_e$ bezeichnet die Menge aller endlichen Teilmengen): Liest der 2-KA im Zustand q die Eingabe b (auch $b = \epsilon$ ist möglich), sind Z_1, Z_2 die obersten Zeichen der beiden Keller und gilt $(q', \alpha_1, \alpha_2) \in \delta(q, b, Z_1, Z_2)$, dann kann der 2-KA in den Zustand q' übergehen und hierbei Z_1 durch α_1 und Z_2 durch α_2 ersetzen.

Zeigen Sie: Jede (deterministische) Turingmaschine $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ kann durch einen 2-Kellerautomaten $K = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', Z_0, Z_0', F')$ simuliert werden.
Hinweis: Bei einer Simulation müssen die Berechnungen bzw. Konfigurationsänderungen zweier Machinen einander zugeordnet werden können und die akzeptierten Sprachen müssen gleich sein.

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

Beantworten Sie kurz die folgenden Fragen:

1. Gibt es eine Turingmaschine, die sich nie mehr als vier Schritte vom Startzustand entfernt und eine unendliche Sprache akzeptiert? Begründung!
2. Welche Sprachen lassen sich mit Turingmaschinen, die ihren Kopf immer nur nach rechts bewegen, erkennen?
3. Gibt es für jede Turingmaschine T eine Turingmaschine T' mit nur einem Zustand, die die Sprache von T akzeptiert?

Vorbereitung 2

Wir konstruieren eine Turingmaschine $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$, mit $\Sigma = \{|\}$ wie folgt.

Zu Beginn steht, außer Leerzeichen, nur eine Sequenz von Strichen auf dem Band. Der Schreib-/Lesekopf der Turing-Maschine steht auf dem ersten Strich (von links gesehen). Die Berechnung erfolgt, indem jeweils der erste Strich (von links gesehen) durch ein Hilfszeichen X ersetzt wird und zusätzlich ein Hilfszeichen X an das linke Ende geschrieben wird. Zum Schluß werden alle Hilfszeichen von rechts nach links durch Striche ersetzt.
Sei $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ mit $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{|\}$, $\Gamma = \{|, X, \Box\}$ und $F = \{q_3\}$. Die Übergangsfunktion δ entnehmen wir der folgenden Tabelle:

Übergang	Kommentar
$\delta(q_0, \|) = (q_1, X, L)$	ersetze erstes $\|$ durch Hilfszeichen X
$\delta(q_1, X) = (q_1, X, L)$	gehe nach links zum ersten X
$\delta(q_1, \Box) = (q_0, X, R)$	füge zusätzliches Hilfszeichen X am Anfang ein
$\delta(q_0, X) = (q_0, X, R)$	gehe nach rechts zum ersten $\|$
$\delta(q_0, \Box) = (q_2, \Box, L)$	alle $\|$ abgearbeitet
$\delta(q_2, X) = (q_2, \|, L)$	ersetze X durch $\|$
$\delta(q_2, \Box) = (q_3, \Box, R)$	alle X durch $\|$ ersetzt, Stopp

Spezifizieren Sie möglichst knapp den Bandinhalt in Abhängigkeit der Eingabe, wenn die Turingmaschine anhält.

Vorbereitung 3

Beweisen oder widerlegen Sie:
Für jede Turingmaschine T gibt es eine Turingmaschine T' mit nur einem Zustand, die die Sprache von T akzeptiert.

Vorbereitung 4

Seien $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ein beliebiges n-elementiges Alphabet und $\Sigma' = \Sigma \cup \{\#\}$.
Geben Sie eine Turingmaschine $M = (Q, \Sigma', \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ mit höchstens 5 Zuständen an, die bei leerer Eingabe das Alphabet Σ in der Form $\#a_1\#a_2 \ldots \#a_n$ auf das Band schreibt und mit dem Kopf auf dem letzten, rechtsstehenden Zeichen der Ausgabe anhält.

Tutoraufgabe 1

Geben Sie eine deterministische Turingmaschine $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ an, mit $\Sigma = \{|\}$, die eine eingegebene Strichzahl verdoppelt.
Begründen Sie, warum Ihre Turingmaschine die Spezifikation erfüllt.

Tutoraufgabe 2

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Wir bezeichnen mit $\overline{w}$ die Negation eines Wortes $w \in \{0, 1\}^*$, d.h. alle Nullen werden durch Einsen ersetzt und umgekehrt.

1. Geben Sie eine deterministische Turingmaschine an, die für ein Eingabewort $w \in \Sigma^*$ folgende Berechnung durchführt: Am Ende der Berechnung steht auf dem Band das Wort $w\overline{w}$ und der Kopf steht in einem Endzustand auf dem ersten Zeichen dieses Wortes.

   Kommentieren Sie ihre Konstruktion durch eine informelle Beschreibung Ihrer Lösungsidee.

2. Geben Sie nun eine Turingmaschine an, die die Sprache $L = \{w\overline{w}\,;\, w \in \Sigma^*\}$ akzeptiert. Kommentieren Sie wiederum ihre Konstruktion durch eine informelle Beschreibung Ihrer Lösungsidee.

Tutoraufgabe 3

Sei Σ ein Alphabet. Geben Sie f'ur die kontextsensitive Sprache $L = \{ww\,;\, w \in \Sigma^*\}$ einen linear beschränkten Automaten M an, der L akzeptiert.