

Übersichtsfolien zur Übung

Theoretische Informatik Sommersemester 2014

Markus Kaiser

16. Juli 2014

■ Markus Kaiser

- Mail: tutor@zfix.org
- Web: theo.zfix.org
- Hg: tutor.zfix.org

■ Meine Übungen

- Gruppe 03: Montag, 16:05 - 17:35, 03.11.018
- Gruppe 15: Donnerstag, 10:15 - 11:45, 00.08.038

■ Hausaufgaben

- Abgabe am Mittwoch, 10h
- Rückgabe in der Übung
- **Kein Notenbonus**
- Trotzdem machen!

■ Klausur

- Endterm: Do 24.07. 11-14h
- Wiederholung: Do 25.09. 11-14h

Aus der VL

- Automatentheorie
 - Rechner mit endlichem oder kellerartigem Speicher
- Grammatiken
 - Syntax von Programmiersprachen
- Berechenbarkeitstheorie
 - Untersuchung der Grenzen, was Rechner prinzipiell können
- Komplexitätstheorie
 - Untersuchung der Grenzen, was Rechner mit begrenzten Ressourcen können

Definition

- Ein **Alphabet** Σ ist eine endliche Menge.
- Ein **Wort** über Σ ist eine endliche Folge von Zeichen.
- Eine Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ ist eine **formale Sprache**

Definition (Operationen auf Sprachen)

- $AB := \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\}$
- $A^{n+1} := A^n A, \quad A^0 := \{\epsilon\}$
- $A^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A^n$

Definition (Grammatik)

Eine (Phrasenstruktur-)Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ist ein 4-Tupel:

V endlich viele **Nichtterminale** (Variablen)

Σ ein Alphabet von **Terminalen**

P endlich viele **Produktionen** $\subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$

S ein **Startsymbol** (Axiom)

Ist $(l, r) \in P$, so schreibt man $l \rightarrow r$.

Beispiel

$\Sigma = \{0, 1\}$. Grammatik für alle Wörter ungerader Länge, bei denen alle Nullen vor der ersten Eins stehen und weniger Nullen als Einsen vorhanden sind.

Definition (Grammatik)

Eine (Phrasenstruktur-)Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ist ein 4-Tupel:

V endlich viele **Nichtterminale** (Variablen)

Σ ein Alphabet von **Terminalen**

P endlich viele **Produktionen** $\subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$

S ein **Startsymbol** (Axiom)

Ist $(l, r) \in P$, so schreibt man $l \rightarrow r$.

Beispiel

$\Sigma = \{0, 1\}$. Grammatik für alle Wörter ungerader Länge, bei denen alle Nullen vor der ersten Eins stehen und weniger Nullen als Einsen vorhanden sind.

$$S \rightarrow 0S1 \mid S11 \mid 1$$

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik und $\alpha \rightarrow \beta \in P$ beliebig.

Definition (Monotonie)

G heißt (längen-)monoton, wenn für $\alpha \neq S$ gilt

$$|\alpha| \leq |\beta|$$

und falls $S \rightarrow \epsilon \in P$, dann kommt S nie auf der rechten Seite vor.

Definition (Chomsky-Typen)

Seien $A \in V$, $\gamma, \delta \in (V \cup \Sigma)^*$ und $\beta' \in (V \cup \Sigma)^+$.

Damit G vom Typ k ist, muss für α und β gelten

	α	β
Typ 0	beliebig	beliebig
Typ 1	$= \gamma A \delta$	$= \gamma \beta' \delta$
Typ 2	$\in V$	beliebig
Typ 3	$\in V$	$\in \Sigma^+ \cup \Sigma^* V$

Ab Typ 1 muss G auch **monoton** sein.

Alle formalen Sprachen

Typ 0 - Rekursiv aufzählbar

Grammatik

Turingmaschine, WHILE-Programm, μ -rekursive Funktion

Typ 1 - Kontextsensitiv

Längenmonotone Grammatik

Linear Beschränkter Automat (LBA)

Typ 2 - Kontextfrei

Links nur ein Nichtterminal

Kellerautomat (PDA)

Typ 3 - Regulär

Links- / Rechtsreguläre Grammatik

DFA, NFA, RE

Definition (Intuitive Berechenbarkeit)

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ heißt **intuitiv berechenbar**, wenn es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$

- nach **endlich vielen Schritten** mit Ergebnis $f(n_1, \dots, n_k)$ hält, falls $f(\dots)$ definiert ist,
- und **nicht terminiert**, falls $f(\dots)$ nicht definiert ist.

Churchsche These (nicht beweisbar)

Turing-Maschinen können genau **alle** intuitiv berechenbaren Funktionen berechnen.

Definition (Entscheidbarkeit)

Eine Menge A heißt **entscheidbar** gdw ihre **charakteristische Funktion**

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

berechenbar ist.

Definition (Semi-Entscheidbarkeit)

Eine Menge A heißt **semi-entscheidbar** gdw

$$\chi'_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ \perp & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

berechenbar ist.

Definition (kontextfreie Linksableitung)

Eine Ableitung

$$S \rightarrow^* xAz \rightarrow x\beta z \rightarrow^* w$$

heißt (kontextfreie) **Linksableitung**, wenn für jede Anwendung jeder Produktion $A \rightarrow \beta$ gilt, dass in x kein Nichtterminal vorkommt.

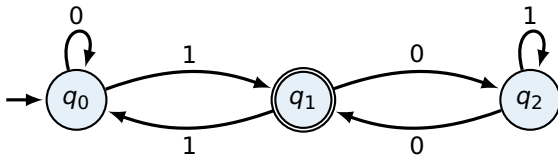
Definition (Eindeutigkeit)

- Eine Grammatik heißt **eindeutig**, wenn es für jedes Wort genau eine Linksableitung gibt.
- Eine Sprache heißt **eindeutig**, wenn es für sie eine eindeutige Grammatik gibt.

Definition (Deterministischer endlicher Automat)

Ein DFA ist ein Tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ aus einer/einem

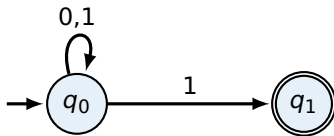
- endlichen Menge von Zuständen Q
- endlichen Eingabealphabet Σ
- totalen Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$
- Startzustand $q_0 \in Q$
- Menge von Endzuständen $F \subseteq Q$



Definition (Nicht-Deterministischer endlicher Automat)

Ein NFA ist ein Tupel $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ mit

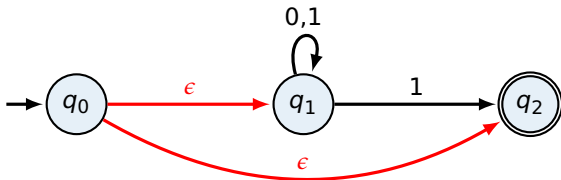
- Q, Σ, F wie ein DFA
- Menge von Startzuständen $S \subseteq F$
- Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$



Definition (NFA mit ϵ -Übergängen)

Ein ϵ -NFA ist ein Tupel $N = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ mit

- Q, Σ, F wie ein DFA
- Menge von **Startzuständen** $S \subseteq F$
- **Übergangsfunktion** $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$



Potenzmengenkonstruktion

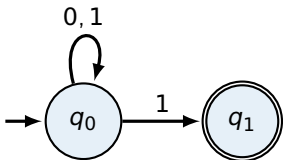
Konstruiere einen Automaten, der **alle möglichen Pfade** gleichzeitig berücksichtigt. Gegeben ein NFA $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$, konstruiere einen DFA mit Zuständen aus $\mathcal{P}(Q)$.

- Starte in $\{S\}$
- Die Übergangsfunktion speichert **alle möglichen Schritte**

$$\bar{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$

$$(M, a) \mapsto \bigcup_{q \in M} \delta(q, a)$$

- M ist Endzustand wenn $F \cap M \neq \emptyset$



Potenzmengenkonstruktion

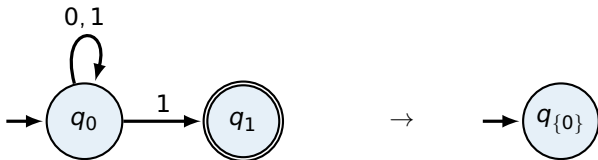
Konstruiere einen Automaten, der **alle möglichen Pfade** gleichzeitig berücksichtigt. Gegeben ein NFA $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$, konstruiere einen DFA mit Zuständen aus $\mathcal{P}(Q)$.

- Starte in $\{S\}$
- Die Übergangsfunktion speichert **alle möglichen Schritte**

$$\bar{\delta}: \mathcal{P}(Q) \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$

$$(M, a) \mapsto \bigcup_{q \in M} \delta(q, a)$$

- M ist Endzustand wenn $F \cap M \neq \emptyset$



Potenzmengenkonstruktion

Konstruiere einen Automaten, der **alle möglichen Pfade** gleichzeitig berücksichtigt. Gegeben ein NFA $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$, konstruiere einen DFA mit Zuständen aus $\mathcal{P}(Q)$.

- Starte in $\{S\}$
- Die Übergangsfunktion speichert **alle möglichen Schritte**

$$\bar{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$

$$(M, a) \mapsto \bigcup_{q \in M} \delta(q, a)$$

- M ist Endzustand wenn $F \cap M \neq \emptyset$



Potenzmengenkonstruktion

Konstruiere einen Automaten, der **alle möglichen Pfade** gleichzeitig berücksichtigt. Gegeben ein NFA $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$, konstruiere einen DFA mit Zuständen aus $\mathcal{P}(Q)$.

- Starte in $\{S\}$
- Die Übergangsfunktion speichert **alle möglichen Schritte**

$$\bar{\delta}: \mathcal{P}(Q) \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$

$$(M, a) \mapsto \bigcup_{q \in M} \delta(q, a)$$

- M ist Endzustand wenn $F \cap M \neq \emptyset$



Definition (Regulärer Ausdruck)

Reguläre Ausdrücke sind induktiv definiert

- \emptyset ist ein regulärer Ausdruck
- ϵ ist ein regulärer Ausdruck
- Für alle $a \in \Sigma$ ist a ein regulärer Ausdruck
- Sind α und β reguläre Ausdrücke, dann auch

Konkatenation $\alpha\beta$

Veroderung $\alpha \mid \beta$

Wiederholung α^*

Analoge Sprachdefinition, z.B. $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$

Beispiel

- $\alpha = (0|1)^*00$
- Worte bestehen aus einer beliebigen Folge von Einsen und Nullen gefolgt von zwei Nullen.
- $L(\alpha) \supseteq \{x \mid x \text{ Binärzahl, } x \bmod 4 = 0\}$

Thompson-Konstruktion

Für einen Ausdruck γ wird rekursiv mit struktureller Induktion ein ϵ -NFA konstruiert.

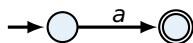
$$\gamma = \emptyset$$



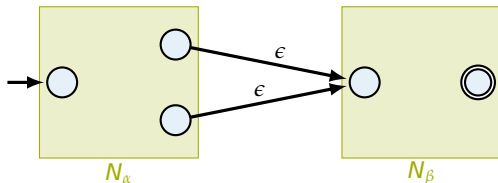
$$\gamma = \epsilon$$



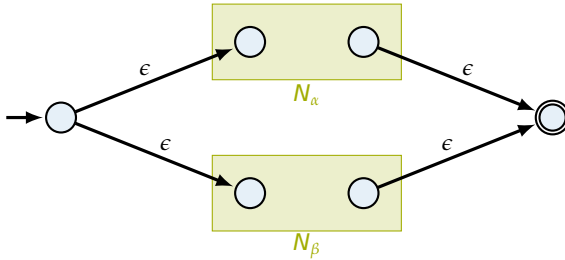
$$\gamma = a \in \Sigma$$



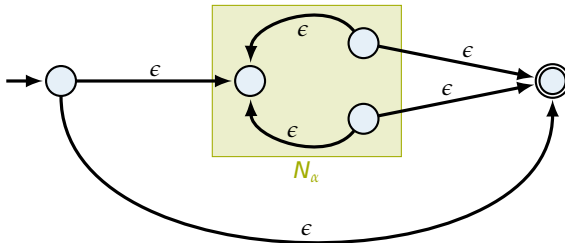
$$\gamma = \alpha\beta$$



$$\gamma = \alpha \mid \beta$$



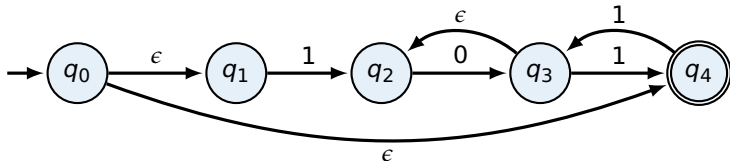
$$\gamma = \alpha^*$$



Idee

Entferne ϵ -Kanten durch das Bilden von ϵ -Hüllen.

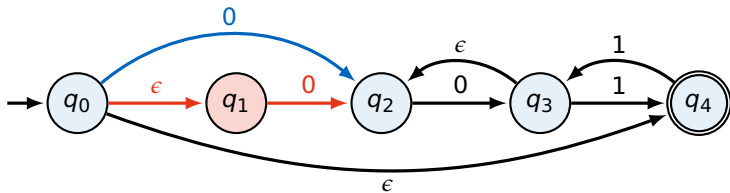
- 1 Entferne **unnötige Knoten**.
- 2 Für jeden **Pfad** der Form $\epsilon \dots \epsilon a \epsilon \dots \epsilon$ verbinde Anfangs- und Endknoten mit einer **a -Kante**.
- 3 Entferne alle **ϵ -Kanten** und unerreichbare Knoten.
- 4 Wurde das leere Wort akzeptiert mache den **Anfangszustand** zum Endzustand.



Idee

Entferne ϵ -Kanten durch das Bilden von ϵ -Hüllen.

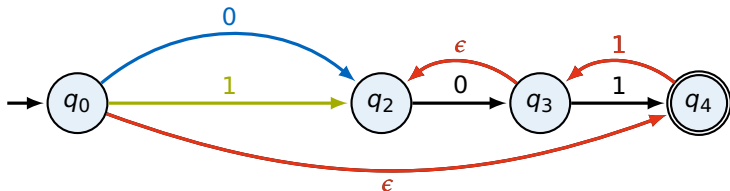
- 1 Entferne **unnötige Knoten**.
- 2 Für jeden **Pfad** der Form $\epsilon \dots \epsilon a \epsilon \dots \epsilon$ verbinde Anfangs- und Endknoten mit einer **a -Kante**.
- 3 Entferne alle **ϵ -Kanten** und unerreichbare Knoten.
- 4 Wurde das leere Wort akzeptiert mache den **Anfangszustand** zum Endzustand.



Idee

Entferne ϵ -Kanten durch das Bilden von ϵ -Hüllen.

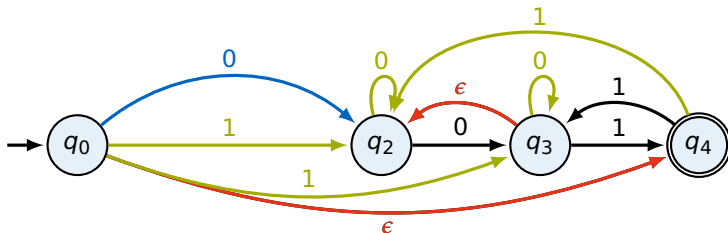
- 1 Entferne **unnötige Knoten**.
- 2 Für jeden **Pfad** der Form $\epsilon \dots \epsilon a \epsilon \dots \epsilon$ verbinde Anfangs- und Endknoten mit einer **a -Kante**.
- 3 Entferne alle ϵ -Kanten und unerreichbare Knoten.
- 4 Wurde das leere Wort akzeptiert mache den **Anfangszustand** zum Endzustand.



Idee

Entferne ϵ -Kanten durch das Bilden von ϵ -Hüllen.

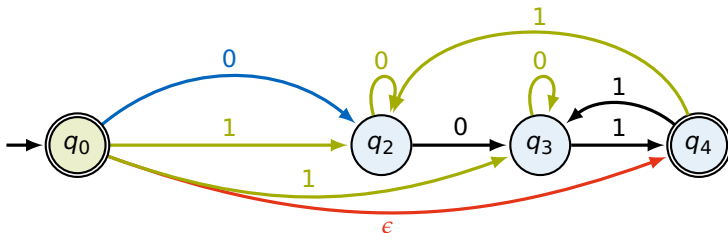
- 1 Entferne **unnötige Knoten**.
- 2 Für jeden **Pfad** der Form $\epsilon \dots \epsilon a \epsilon \dots \epsilon$ verbinde Anfangs- und Endknoten mit einer **a -Kante**.
- 3 Entferne alle **ϵ -Kanten** und unerreichbare Knoten.
- 4 Wurde das leere Wort akzeptiert mache den **Anfangszustand** zum Endzustand.



Idee

Entferne ϵ -Kanten durch das Bilden von ϵ -Hüllen.

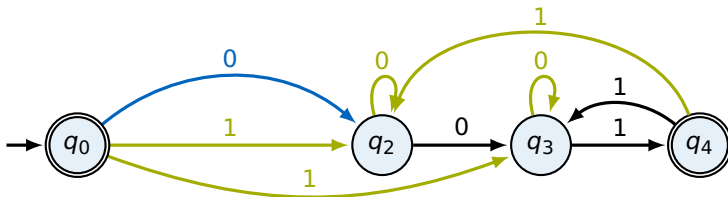
- 1 Entferne **unnötige Knoten**.
- 2 Für jeden **Pfad** der Form $\epsilon \dots \epsilon a \epsilon \dots \epsilon$ verbinde Anfangs- und Endknoten mit einer **a -Kante**.
- 3 Entferne alle **ϵ -Kanten** und unerreichbare Knoten.
- 4 Wurde das leere Wort akzeptiert mache den **Anfangszustand** zum Endzustand.



Idee

Entferne ϵ -Kanten durch das Bilden von ϵ -Hüllen.

- 1 Entferne **unnötige Knoten**.
- 2 Für jeden **Pfad** der Form $\epsilon \dots \epsilon a \epsilon \dots \epsilon$ verbinde Anfangs- und Endknoten mit einer **a -Kante**.
- 3 Entferne alle **ϵ -Kanten** und unerreichbare Knoten.
- 4 Wurde das leere Wort akzeptiert mache den **Anfangszustand** zum Endzustand.



Definition (Äquivalente Worte)

Jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ induziert eine **Äquivalenzrelation** $\equiv_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$

$$u \equiv_L v \iff (\forall w \in \Sigma^*. uw \in L \iff vw \in L)$$

Definition (Äquivalente Zustände)

Zwei Zustände im DFA A sind **äquivalent** wenn sie die selbe Sprache akzeptieren.

$$p \equiv_A q \iff (\forall w \in \Sigma^*. \hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \in F)$$

Definition (Äquivalente Worte)

Jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ induziert eine **Äquivalenzrelation** $\equiv_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$

$$u \equiv_L v \iff (\forall w \in \Sigma^*. uw \in L \iff vw \in L)$$

Definition (Äquivalente Zustände)

Zwei Zustände im DFA A sind **äquivalent** wenn sie die selbe Sprache akzeptieren.

$$p \equiv_A q \iff (\forall w \in \Sigma^*. \hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \in F)$$

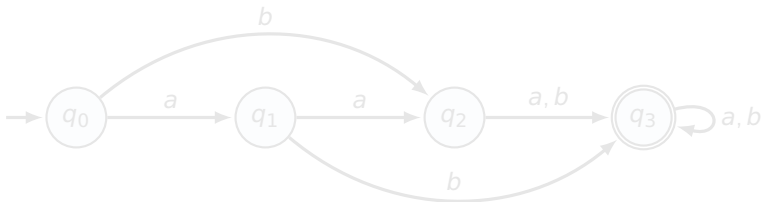
Definition (Unterscheidbarkeit)

Zwei Zustände sind **unterscheidbar**, wenn sie unterschiedliche Sprachen akzeptieren.

$$p \not\equiv_A q \iff (\exists w \in \Sigma^*. \delta(p, w) \in F \wedge \delta(q, w) \notin F)$$

Satz

Sind $\delta(p, a)$ und $\delta(q, a)$ unterscheidbar, dann auch p und q .



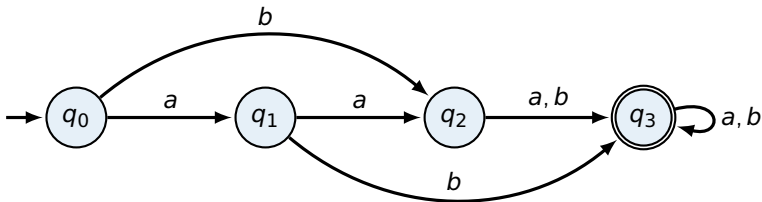
Definition (Unterscheidbarkeit)

Zwei Zustände sind **unterscheidbar**, wenn sie unterschiedliche Sprachen akzeptieren.

$$p \not\equiv_A q \iff (\exists w \in \Sigma^*. \delta(p, w) \in F \wedge \delta(q, w) \notin F)$$

Satz

Sind $\delta(p, a)$ und $\delta(q, a)$ unterscheidbar, dann auch p und q .



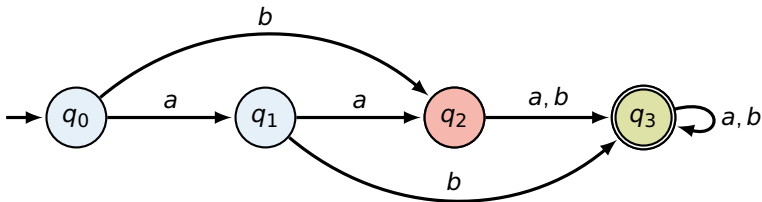
Definition (Unterscheidbarkeit)

Zwei Zustände sind **unterscheidbar**, wenn sie unterschiedliche Sprachen akzeptieren.

$$p \not\equiv_A q \iff (\exists w \in \Sigma^*. \delta(p, w) \in F \wedge \delta(q, w) \notin F)$$

Satz

Sind $\delta(p, a)$ und $\delta(q, a)$ unterscheidbar, dann auch p und q .



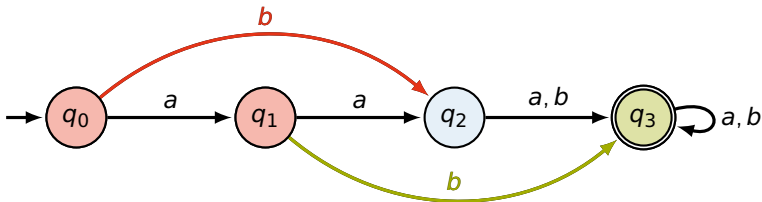
Definition (Unterscheidbarkeit)

Zwei Zustände sind **unterscheidbar**, wenn sie unterschiedliche Sprachen akzeptieren.

$$p \not\equiv_A q \iff (\exists w \in \Sigma^* . \delta(p, w) \in F \wedge \delta(q, w) \notin F)$$

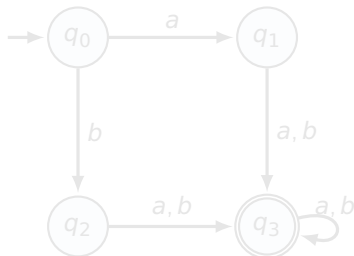
Satz

Sind $\delta(p, a)$ und $\delta(q, a)$ unterscheidbar, dann auch p und q .



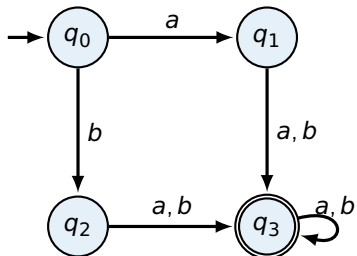
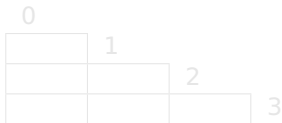
Quotientenautomat

- 1 Entferne alle von q_0 **nicht erreichbaren** Zustände
- 2 Berechne die **unterscheidbaren** Zustände
- 3 **Kollabiere** die äquivalenten Zustände



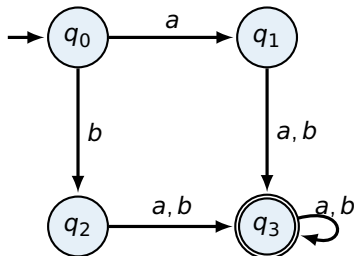
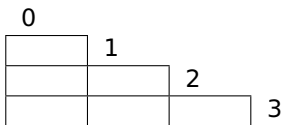
Quotientenautomat

- 1 Entferne alle von q_0 **nicht erreichbaren** Zustände
- 2 Berechne die **unterscheidbaren** Zustände
- 3 **Kollabiere** die äquivalenten Zustände



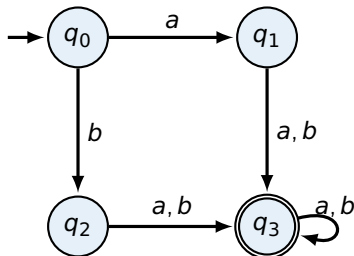
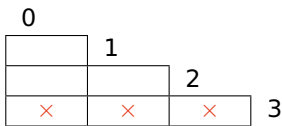
Quotientenautomat

- 1 Entferne alle von q_0 **nicht erreichbaren** Zustände
- 2 Berechne die **unterscheidbaren** Zustände
- 3 **Kollabiere** die äquivalenten Zustände



Quotientenautomat

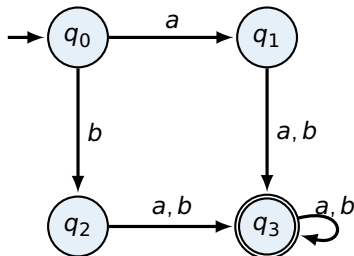
- 1 Entferne alle von q_0 **nicht erreichbaren** Zustände
- 2 Berechne die **unterscheidbaren** Zustände
- 3 **Kollabiere** die äquivalenten Zustände



Quotientenautomat

- 1 Entferne alle von q_0 **nicht erreichbaren** Zustände
- 2 Berechne die **unterscheidbaren** Zustände
- 3 **Kollabiere** die äquivalenten Zustände

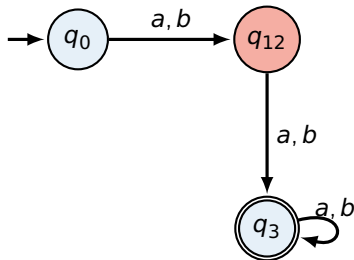
0			
1/a	1		
1/a		2	
×	×	×	3



Quotientenautomat

- 1 Entferne alle von q_0 **nicht erreichbaren** Zustände
- 2 Berechne die **unterscheidbaren** Zustände
- 3 **Kollabiere** die äquivalenten Zustände

0			
1/a	1		
1/a		2	
×	×	×	3

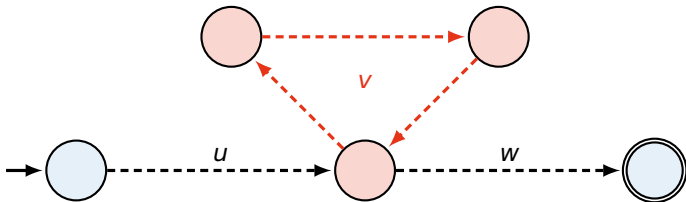


Satz (Pumping Lemma für reguläre Sprachen)

Sei $R \subseteq \Sigma^*$ regulär.

Dann gibt es ein $n > 0$, so dass sich **jedes** $z \in R$ mit $|z| \geq n$ so in $z = uvw$ zerlegen lässt, dass

- $v \neq \epsilon$
- $|uv| \leq n$
- $\forall i \geq 0. uv^i w \in R$



Definition

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG.

Ein Symbol $X \in V \cup \Sigma$ ist

nützlich es gibt $S \rightarrow_G^* w \in \Sigma^*$ in der X **vorkommt**

erzeugend es gibt $X \rightarrow_G^* w \in \Sigma^*$

erreichbar es gibt $S \rightarrow_G^* \alpha X \beta$

Satz

*Nützliche Symbole **sind** erzeugend und erreichbar. Aber **nicht** notwendigerweise umgekehrt.*

$$S \rightarrow AB \mid a, \quad A \rightarrow b$$

Definition (Chomsky-Normalform)

Eine kontextfreie Grammatik ist in **Chomsky-Normalform** (CNF) genau dann wenn alle Produktionen die Form

$$A \rightarrow a \quad \text{oder} \quad A \rightarrow BC$$

haben.

Satz

Zu **jeder** CFG G existiert eine CFG G' in Chomsky-Normalform mit

$$L(G') = L(G) \setminus \{\epsilon\}$$

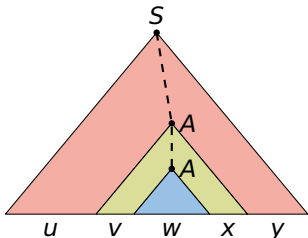
Satz (Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei.

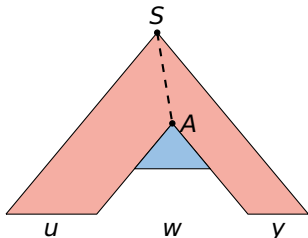
Dann gibt es ein $n > 0$, so dass sich **jedes** $z \in L$ mit $|z| \geq n$ so in $z = uvwxy$ zerlegen lässt, dass

- $vx \neq \epsilon$
- $|vwx| \leq n$
- $\forall i \geq 0. uv^iwx^iy \in L$

$S \rightarrow^* uAy \rightarrow^* uvAxy \rightarrow^* uvwxy$



$S \rightarrow^* uAy \rightarrow^* uwy$



CNF Konstruktion

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG.

- 1 **Eliminiere ϵ -Produktionen**
- 2 **Eliminiere Kettenproduktionen**
- 3 **Ersetze Terminale** durch Nichtterminale
- 4 **Verkürze Ketten** von Nichtterminalen der Länge ≥ 3

CNF Konstruktion

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG.

- 1 **Eliminiere ϵ -Produktionen**
- 2 **Eliminiere Kettenproduktionen**
- 3 **Ersetze Terminale** durch Nichtterminale
- 4 **Verkürze Ketten** von Nichtterminalen der Länge ≥ 3

Sind $B \rightarrow \epsilon$ und $A \rightarrow \alpha B \beta$ in P , dann füge $A \rightarrow \alpha \beta$ hinzu. Entferne danach alle ϵ -Produktionen.

$$S \rightarrow Ab, \quad A \rightarrow aAA \mid \epsilon$$

wird zu:

$$S \rightarrow Ab \mid b$$

$$A \rightarrow aAA \mid aA \mid a$$

CNF Konstruktion

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG.

- 1 Eliminiere ϵ -Produktionen
- 2 Eliminiere Kettenproduktionen
- 3 Ersetze Terminale durch Nichtterminale
- 4 Verkürze Ketten von Nichtterminalen der Länge ≥ 3

Sind $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow \alpha$ in P , dann füge $A \rightarrow \alpha$ hinzu. Entferne danach alle Kettenproduktionen und unerreichbaren Symbole.

$$S \rightarrow A, \quad A \rightarrow a \mid B, \quad B \rightarrow bS$$

wird zu:

$$A \rightarrow a \mid bS$$

$$S \rightarrow a \mid bS$$

CNF Konstruktion

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG.

- 1 Eliminiere ϵ -Produktionen
- 2 Eliminiere Kettenproduktionen
- 3 Ersetze Terminale durch Nichtterminale
- 4 Verkürze Ketten von Nichtterminalen der Länge ≥ 3

Ersetze jedes $a \in \Sigma$ in einer rechten Seite **länger als 1** durch ein neues Nichtterminal.

$$S \rightarrow aa \mid Bb \mid b, \quad B \rightarrow \dots$$

wird zu:

$$S \rightarrow X_a X_a \mid B X_b \mid b$$

$$X_a \rightarrow a, \quad X_b \rightarrow b$$

CNF Konstruktion

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG.

- 1 Eliminiere ϵ -Produktionen
- 2 Eliminiere Kettenproduktionen
- 3 Ersetze Terminale durch Nichtterminale
- 4 Verkürze Ketten von Nichtterminalen der Länge ≥ 3

Ersetze jede Produktion der Form $A \rightarrow B_1 B_2 \dots B_k$ durch neue Nichtterminale mit Produktionen der Länge 2.

$$S \rightarrow X_a X_b B X_a, \quad X_a \rightarrow a, \quad X_b \rightarrow b, \quad B \rightarrow \dots$$

wird zu:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow X_a T_1 \\ T_1 &\rightarrow X_b T_2, \quad T_2 \rightarrow B X_a \end{aligned}$$

Definition (Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus)

Der **CYK-Algorithmus** entscheidet das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken in Chomsky-Normalform in $\mathcal{O}(n^3)$.

Gegeben eine **Grammatik** $G = (V, \Sigma, P, S)$ in CNF und ein **Wort** $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$. Mit

$$V_{ij} := \{A \in V \mid A \rightarrow_G^* a_i \dots a_j\}$$

ist

$$w \in L(G) \Leftrightarrow S \in V_{1n}$$

$$V_{ii} = \{A \in V \mid (A \rightarrow a_i) \in P\}$$

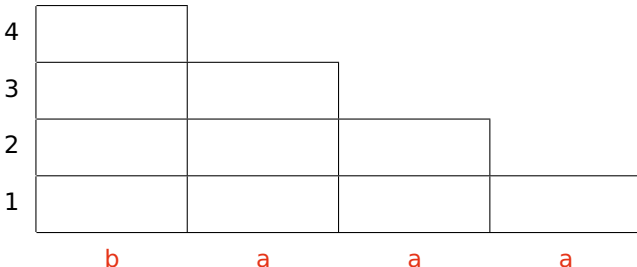
$$V_{ij} = \{A \in V \mid \exists k, B \in V_{ik}, C \in V_{k+1,j} \cdot (A \rightarrow BC) \in P\}$$

CYK-Algorithmus

Kombiniere **Teilwörter** zum ganzen Wort, wenn möglich.

- 1 Initialisiere mit den V_{ij} .
- 2 Befülle die Tabelle von unten nach oben.

$S \rightarrow AB \mid BC, \quad A \rightarrow BA \mid a, \quad B \rightarrow CC \mid b, \quad C \rightarrow AB \mid a$



CYK-Algorithmus

Kombiniere **Teilwörter** zum ganzen Wort, wenn möglich.

- 1 Initialisiere mit den V_{ij} .
- 2 Befülle die Tabelle von unten nach oben.

$S \rightarrow AB \mid BC, \quad A \rightarrow BA \mid a, \quad B \rightarrow CC \mid b, \quad C \rightarrow AB \mid a$

4				
3				
2				
1	B	A, C	A, C	A, C
	b	a	a	a

CYK-Algorithmus

Kombiniere **Teilwörter** zum ganzen Wort, wenn möglich.

- 1 Initialisiere mit den V_{ij} .
- 2 Befülle die Tabelle von unten nach oben.

$S \rightarrow AB \mid BC, \quad A \rightarrow BA \mid a, \quad B \rightarrow CC \mid b, \quad C \rightarrow AB \mid a$

4				
3				
2	A, S	B	B	
1	B	A, C	A, C	A, C
	b	a	a	a

CYK-Algorithmus

Kombiniere **Teilwörter** zum ganzen Wort, wenn möglich.

- 1 Initialisiere mit den V_{ij} .
- 2 Befülle die Tabelle von unten nach oben.

$S \rightarrow AB \mid BC, \quad A \rightarrow BA \mid a, \quad B \rightarrow CC \mid b, \quad C \rightarrow AB \mid a$

4				
3	\emptyset	S, A, C		
2	A, S	B	B	
1	B	A, C	A, C	A, C
	b	a	a	a

CYK-Algorithmus

Kombiniere **Teilwörter** zum ganzen Wort, wenn möglich.

- 1 Initialisiere mit den V_{ij} .
- 2 Befülle die Tabelle von unten nach oben.

$S \rightarrow AB \mid BC, \quad A \rightarrow BA \mid a, \quad B \rightarrow CC \mid b, \quad C \rightarrow AB \mid a$

4	S, ...			
3	∅	S, A, C		
2	A, S	B	B	
1	B	A, C	A, C	A, C
	b	a	a	a

Induktive Sprachdefinition

Die **induktive Definition** zu einer Grammatik G ergibt sich direkt aus ihren Produktionen. Dabei werden kleinere Worte zu größeren Worten **zusammengesetzt**, die Definition erfolgt **bottom-up**.

Beispiel

Mit den Produktionen $S \rightarrow 0S1 \mid S11 \mid 1$:

$$\begin{aligned} & 1 \in L_G(S) \\ u \in L_G(S) & \implies 0u1 \in L_G(S) \\ u \in L_G(S) & \implies u11 \in L_G(S) \end{aligned}$$

Also z.B:

$$1 \in L_G(S) \implies 011 \in L_G(S) \implies 01111 \in L_G(S)$$

Satz (Ogden Lemma für kontextfreie Sprachen)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei.

Dann gibt es ein $n > 0$, so dass für **jedes** $z \in L$ mit $|z| \geq n$ gilt:

Für **jede** Markierung M von **mindestens** n Buchstaben in z gibt es eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit

- $|vx|_M \geq 1$
- $|vwx|_M \leq n$
- $\forall i \geq 0. uv^iwx^iy \in L$

Beispiel (Markierung)

Sei $w = abaabaaa$ ein Wort. Dann ist

$$w = \text{ab} \text{aa} \text{ba} \text{aaa}$$

eine Markierung mit $|w|_M = 3$.

Definition (Greibach-Normalform)

Eine kontextfreie Grammatik ist in **Greibach-Normalform** (GNF) genau dann wenn alle Produktionen außer $S \rightarrow \epsilon$ die Form

$$A \rightarrow a\alpha \quad \text{mit} \quad a \in \Sigma, \alpha \in V^*$$

haben.

Satz

Zu *jeder* CFG G existiert eine CFG G' in Greibach-Normalform mit

$$L(G') = L(G)$$

Satz (Einsetzen von Produktionen)

Enthält eine CFG die Produktionen

$$A \rightarrow \alpha_1 B \alpha_2$$

$$B \rightarrow \beta_1 \mid \dots \mid \beta_k$$

so ändert sich die erzeugte Sprache nicht, wenn man B in A *einsetzt*.

$$A \rightarrow \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \mid \dots \mid \alpha_1 \beta_k \alpha_2$$

Beispiel

Die Grammatik

$$S \rightarrow a \mid aBc$$

$$B \rightarrow b \mid bS$$

ist äquivalent zur Grammatik

$$S \rightarrow a \mid abc \mid abSc$$

Definition (Linksrekursive Produktion)

Man nennt eine Produktion **linksrekursiv**, wenn sie die Form

$$A \rightarrow A\alpha_1 \mid \cdots \mid A\alpha_k \mid \beta_1 \mid \cdots \mid \beta_l \quad \text{mit} \quad \alpha_i, \beta_i \in (V \cup \Sigma)^+$$

hat, wobei die β_i nicht mit A beginnen.

Satz (Ersetzen von linksrekursiven Produktionen)

Sei A eine linksrekursive Produktion einer CFG.

Dann ändert sich die erzeugte Sprache nicht, wenn wir A **ersetzen** durch

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \beta_1 \mid \cdots \mid \beta_l \mid \beta_1 B \mid \cdots \mid \beta_l B \\ B &\rightarrow \alpha_1 \mid \cdots \mid \alpha_k \mid \alpha_1 B \mid \cdots \mid \alpha_k B \end{aligned}$$

B ist niemals linksrekursiv.

GNF Konstruktion

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG.

- 1 Nummeriere Nichtterminale
- 2 Mache Produktionen **aufsteigend** und **nicht rekursiv**
- 3 **Setze** Produktionen absteigend **ein**

GNF Konstruktion

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG.

- 1 Nummeriere Nichtterminale
- 2 Mache Produktionen aufsteigend und nicht rekursiv
- 3 Setze Produktionen absteigend ein

Benenne alle Nichtterminale beliebig um in $A_1, \dots, A_{|V|}$.

$$S \rightarrow Ab, \quad A \rightarrow aAS \mid \epsilon$$

wird zu

$$\begin{aligned} A_1 &\rightarrow A_2b \\ A_2 &\rightarrow aA_2A_1 \end{aligned}$$

GNF Konstruktion

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG.

- 1 Nummeriere Nichtterminale
- 2 Mache Produktionen **aufsteigend** und **nicht rekursiv**
- 3 Setze Produktionen absteigend **ein**

Betrachte alle Produktionen $A_l \rightarrow \dots$ in **aufsteigender Reihenfolge**.

- Existieren Produktionen der Form $A_l \rightarrow A_r \alpha$ mit $r < l$, dann setze A_r in A_l ein.

$$A_1 \rightarrow A_2 \mid a \mid b$$

$$A_2 \rightarrow A_1 A_1$$

wird zu

$$A_1 \rightarrow A_2 \mid a \mid b$$

$$A_2 \rightarrow A_2 A_1 \mid a A_1 \mid b A_1$$

- Entferne danach alle **linksrekursiven** A_l -Produktionen.

GNF Konstruktion

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG.

- 1 Nummeriere Nichtterminale
- 2 Mache Produktionen **aufsteigend** und **nicht rekursiv**
- 3 Setze Produktionen absteigend ein

Betrachte alle Produktionen $A_l \rightarrow \dots$ in **aufsteigender Reihenfolge**.

- Existieren Produktionen der Form $A_l \rightarrow A_r \alpha$ mit $r < l$, dann setze A_r in A_l ein.
- Entferne danach alle **linksrekursiven** A_l -Produktionen.

$$A_2 \rightarrow A_2 A_1 \mid a A_1 \mid b A_1$$

wird zu

$$A_2 \rightarrow a A_1 \mid b A_1 \mid a A_1 A_3 \mid b A_1 A_3$$

$$A_3 \rightarrow A_1 \mid A_1 A_3$$

GNF Konstruktion

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG.

- 1 Nummeriere Nichtterminale
- 2 Mache Produktionen aufsteigend und nicht rekursiv
- 3 Setze Produktionen absteigend ein

Betrachte alle Produktionen $A_l \rightarrow \dots$ in absteigender Reihenfolge.

- Existieren Produktionen der Form $A_l \rightarrow A_r \alpha$ mit $r > l$, dann setze A_r in A_l ein.

$$A_1 \rightarrow a \mid b \mid A_2$$

$$A_2 \rightarrow aA_1 \mid bA_1 \mid aA_1A_3 \mid bA_1A_3$$

$$A_3 \rightarrow bA_3 \mid c$$

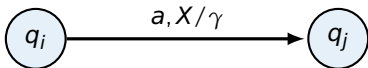
A_1 wird zu

$$A_1 \rightarrow a \mid b \mid aA_1 \mid bA_1 \mid aA_1A_3 \mid bA_1A_3$$

Definition (Kellerautomat)

Ein PDA (Push-Down-Automat) ist ein Tupel $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ aus einer/einem

- endlichen Menge von Zuständen Q
- endlichen Eingabealphabet Σ
- endlichen Kellularphabet Γ
- Übergangsfunktion $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma^*)$
- Startzustand $q_0 \in Q$
- Kellerinitialisierung $Z_0 \in \Gamma$
- Menge von Endzuständen $F \subseteq Q$



Definition (Kellerautomat)

Ein PDA (Push-Down-Automat) ist ein Tupel $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ aus einer/einem

- Übergangsfunktion $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma^*)$

Definition (Akzeptanz)

Ein PDA P akzeptiert $w \in \Sigma^*$ mit Endzustand gdw

$$\exists f \in F, \gamma \in \Gamma^*. (q_0, w, Z_0) \rightarrow_P^* (f, \epsilon, \gamma)$$

Ein PDA P akzeptiert $w \in \Sigma^*$ mit leerem Keller gdw

$$\exists q \in Q. (q_0, w, Z_0) \rightarrow_P^* (q, \epsilon, \epsilon)$$

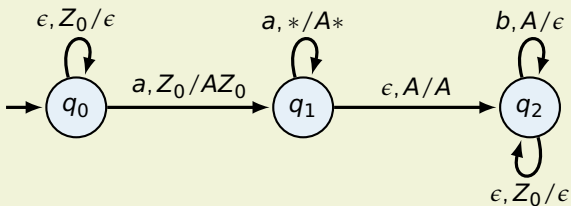
Definition (Kellerautomat)

Ein PDA (Push-Down-Automat) ist ein Tupel $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ aus einer/einem

- Übergangsfunktion $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma^*)$

Beispiel

PDA akzeptierend mit leerem Keller zu $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.



Definition (Kellerautomat)

Ein PDA (Push-Down-Automat) ist ein Tupel $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ aus einer/einem

- Zustandsmenge Q , Eingabealphabet Σ , Kelleralphabet Γ
- Übergangsfunktion $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma^*)$
- Startzustand $q_0 \in Q$, Kellerinitialisierung $Z_0 \in \Gamma$
- Menge von Endzuständen $F \subseteq Q$

Definition (Deterministischer Kellerautomat)

Ein PDA heißt **deterministisch (DPDA)** wenn **für alle** Zustände $q \in Q$, Buchstaben $a \in \Sigma$ und Kellerbuchstaben $X \in \Gamma$ gilt

$$|\delta(q, a, Z)| + |\delta(q, \epsilon, Z)| \leq 1$$

Definition (Präfixbedingung)

Eine Sprache L erfüllt die **Präfixbedingung**, wenn kein Wort der Sprache echtes Präfix eines anderen Wortes der Sprache ist.

$$\forall w \in L \forall s \in \Sigma^+ . ws \notin L$$

Satz

Deterministisch kontextfreie Sprachen werden genau dann von einem *DPDA mit leerem Keller* akzeptiert, wenn sie die **Präfixbedingung erfüllen**.

Definition (Parsing)

Beim **Parsing** wird einem Wort ein Ableitungsbaum in einer Grammatik zugeordnet, indem **bottom-up** die Produktionen (**Reduktionen**) **rückwärts** angewandt werden.

Es wird immer die linkestmögliche Reduktion angewandt.

Definition (Lookahead)

Ein **Lookahead** der Länge k legt fest, dass eine Reduktion nur dann angewandt werden darf, wenn die folgenden k Zeichen im Wort mit dem Lookahead übereinstimmen.

Beispiel

$$S \rightarrow Ac \mid Bbc$$

$$A \rightarrow ab$$

$$B \rightarrow a$$

Produktion	Lookahead
$A \rightarrow ab$	c
$B \rightarrow a$	d

Gegeben das Wort **abc**.

Dann darf $B \rightarrow A$ nicht angewandt werden, $A \rightarrow ab$ jedoch schon.

Definition LR(k)-Grammatik)

Eine CFG ist eine **LR(k)-Grammatik**, wenn Lookaheads der Länge k genügen, um jedem Wort eine eindeutige Ableitung zuzuordnen.

Satz

Die LR(0)-Grammatiken sind eine *echte Teilmenge* der LR(1)-Grammatiken. Diese entsprechen genau den *deterministisch kontextfreien Sprachen*.

$$LR(0) \subset LR(1) = LR(k \geq 1) = DCFL$$

Definition (Turingmaschine)

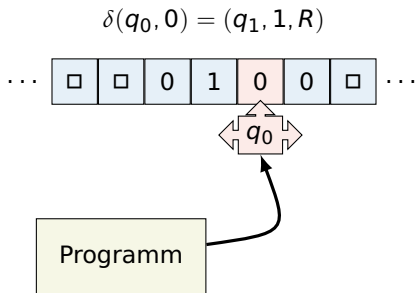
Eine deterministische **Turingmaschine (TM)** ist ein Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \square, F)$ aus einer/einem

- endlichen Menge von **Zuständen** Q
- endlichen **Eingabealphabet** Σ
- endlichen **Bandalphabet** Γ mit $\Sigma \subset \Gamma$
- **Übergangsfunktion** $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$
- **Startzustand** $q_0 \in Q$
- **Leerzeichen** $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$
- Menge von **Endzuständen** $F \subseteq Q$

Definition (Turingmaschine)

Eine deterministische **Turingmaschine (TM)** ist ein Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \square, F)$ aus einer/einem

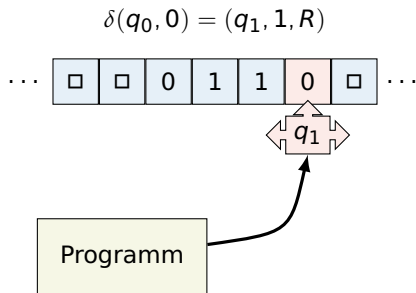
- **Übergangsfunktion** $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$



Definition (Turingmaschine)

Eine deterministische **Turingmaschine (TM)** ist ein Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \square, F)$ aus einer/einem

- **Übergangsfunktion** $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$



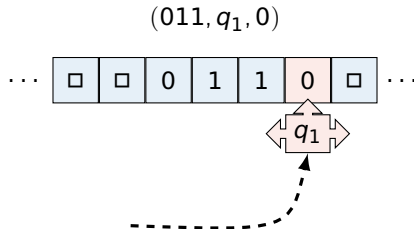
Definition (Konfiguration)

Eine **Konfiguration** ist ein Tripel $(\alpha, q, \beta) \in \Gamma^* \times Q \times \Gamma^*$.

Dies modelliert eine TM mit:

- **Bandinhalt** $\dots \square \alpha \beta \square \dots$
- **Zustand** q
- **Kopf** auf dem **ersten Zeichen** von $\beta \square$

Die **Startkonfiguration** bei Eingabe $w \in \Sigma^*$ ist (ϵ, q_0, w) .



Definition (Konfiguration)

Eine **Konfiguration** ist ein Tripel $(\alpha, q, \beta) \in \Gamma^* \times Q \times \Gamma^*$.

Dies modelliert eine TM mit:

- **Bandinhalt** $\dots \square \alpha \beta \square \dots$
- **Zustand** q
- **Kopf** auf dem **ersten Zeichen** von $\beta \square$

Die **Startkonfiguration** bei Eingabe $w \in \Sigma^*$ ist (ϵ, q_0, w) .

Definition (Akzeptanz)

Eine TM M **akzeptiert** die Sprache

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists f \in F, \alpha, \beta \in \Gamma^*. (\epsilon, q_0, w) \rightarrow_M^* (\alpha, f, \beta)\}$$

Definition (Nichtdeterministische Turingmaschine)

Eine **nichtdeterministische** Turingmaschine (TM) ist ein Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \square, F)$ aus einer/einem

- ...
- **Übergangsfunktion** $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R, N\})$
- ...

Satz

Zu jeder nichtdeterministischen TM N gibt es eine deterministische TM M mit $L(N) = L(M)$.

Definition (Linear Beschränkte Automat)

Eine TM heißt **linear beschränkt (LBA)**, wenn sie den Bereich des Bandes, auf dem das Eingabewort steht, niemals verlässt.

Satz

*Die **linear beschränkten NDTMs** akzeptieren genau die Klasse der **kontextsensitiven Sprachen (Typ 1)**.*

Definition (Queue-Automat)

Ein **Queue-Automat (QA)** ist ein Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ die analog zu Kellerautomaten definiert sind.

- **Übergangsfunktion** $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma^*)$

Im Gegensatz zu PDAs werden neue Symbole **hinten** angefügt.

Beispiel

Gegeben sei die Konfiguration $(q, a, x\alpha)$ eines Queue-Automaten und ein Schritt der Übergangsfunktion.

$$\delta(q, a, x) = (q', yz)$$

Dann ergibt sich die folgende Transition.

$$(q, a, x\alpha) \rightarrow (q', \epsilon, \alpha yz)$$

Satz

Queue-Automaten sind genauso mächtig wie Turingmaschinen.

Definition (Basisfunktionen der PR)

Die Menge der **primitiv rekursiven (PR)** Funktionen ist induktiv definiert. Die Basisfunktionen sind die

konstante Funktion $f(x) = 0$

Nachfolgerfunktion $s(n) = n + 1$

Projektionsfunktion $\pi_i^k : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}, i \in [k]$

$$\pi_i^k(x_1, \dots, x_k) = x_i$$

Definition (Komposition)

Seien g und h_i **PR** und $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$.
Dann ist auch die **Komposition** f **PR**.

$$f(\bar{x}) = g(h_1(\bar{x}), \dots, h_k(\bar{x}))$$

Basisfunktionen und Komposition

Die folgenden Funktionen sind schon als **primitiv rekursiv** bekannt.

konstante Funktion $f(x) = 0$

Nachfolgerfunktion $s(n) = n + 1$

Projektionsfunktion $\pi_i^k : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}, i \in [k]$

Komposition $f(\bar{x}) = g(h_1(\bar{x}), \dots, h_k(\bar{x}))$

Definition (Primitive Rekursion)

Das Schema der **primitiven Rekursion** erzeugt aus g und h die neue Funktion f .

$$f(0, \bar{x}) = g(\bar{x})$$

$$f(m + 1, \bar{x}) = h(f(m, \bar{x}), m, \bar{x})$$

f ist ebenfalls **primitiv rekursiv**.

Definition (Erweitertes PR-Schema)

Das erweiterte Schema der primitiven Rekursion erlaubt

$$\begin{aligned}f(0, \bar{x}) &= t_0 \\ f(m+1, \bar{x}) &= t\end{aligned}$$

wobei t_0 und t Terme sind für die gilt

- t_0 enthält nur PR-Funktionen und die x_j
- t enthält nur $f(m, \bar{x})$, PR Funktionen, m und die x_j .

Satz

Das erweiterte Schema der primitiven Rekursion führt nicht aus PR heraus.

Unter anderem diese Programme sind laut Vorlesung oder Übung PR:

- $\text{succ}(x) = x + 1$
- $\text{pred}(x) = \max \{0, x - 1\}$
- $\text{add}(x, y) = x + y$
- $x \dot{-} y = \max \{0, x - y\}$
- $\text{mult}(x, y) = x \cdot y$
- $\text{div}(x, y) = x \div y$ (Ganzzahldivision)
- $\text{pow}(x, y) = x^y$
- Die restliche einfache Arithmetik. . .

- $\text{tower}(n) = 2^{2^{2^{\dots}}}$ mit $\text{tower}(4) = 2^{16}$
- $\text{sqr}(x) = x^2$
- $\text{sqrt}(x) = \sqrt{x}$
- $c(x), p_1(x), p_2(x)$ (Cantorsche Paarungsfunktion)
- $\text{ifthen}(n, a, b) = \begin{cases} a & n \neq 0 \\ b & n = 0 \end{cases}$

Definition (LOOP-Programm)

Syntax von LOOP-Programmen.

Es ist $X \in \{x_0, x_1, \dots\}$ und $C \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned} P &\rightarrow X := X + C \\ &| X := X - C \\ &| P; P \\ &| \mathbf{LOOP\ } X \mathbf{\ DO\ } P \mathbf{\ END} \\ &| \mathbf{IF\ } X = 0 \mathbf{\ DO\ } P \mathbf{\ ELSE\ } Q \mathbf{\ END} \end{aligned}$$

- Ausgabe steht in x_0 , Eingaben in x_1, \dots, x_n , Rest ist 0.
- **LOOP** x_i **DO** P **END** führt P genau n mal aus, wobei n der Anfangswert von x_i ist. Zuweisungen an x_i in P ändern die Anzahl der Durchläufe nicht.

Definition (Intuitive Berechenbarkeit)

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ heißt **intuitiv berechenbar**, wenn es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$

- nach **endlich vielen Schritten** mit Ergebnis $f(n_1, \dots, n_k)$ hält, falls $f(\dots)$ definiert ist,
- und **nicht terminiert**, falls $f(\dots)$ nicht definiert ist.

Churchsche These (nicht beweisbar)

Turing-Maschinen können genau **alle** intuitiv berechenbaren Funktionen berechnen.

Beispiel (Berechenbarkeit)

Sind die folgenden Funktionen intuitiv berechenbar?

$$f_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ prim} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ die ersten } n \text{ Ziffern von } \pi \text{ darstellt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_3(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls in } \pi \text{ } n \text{ Nullen am Stück vorkommen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel (Berechenbarkeit)

Sind die folgenden Funktionen intuitiv berechenbar?

$$f_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ prim} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ die ersten } n \text{ Ziffern von } \pi \text{ darstellt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_3(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls in } \pi \text{ } n \text{ Nullen am Stück vorkommen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Alle drei Funktionen sind intuitiv berechenbar.

Definition (Entscheidbarkeit)

Eine Menge A heißt **entscheidbar** gdw ihre **charakteristische Funktion**

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

berechenbar ist.

Definition (Semi-Entscheidbarkeit)

Eine Menge A heißt **semi-entscheidbar** gdw

$$\chi'_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ \perp & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

berechenbar ist.

Definition (Reduzierbarkeit)

Eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **reduzierbar** auf eine Menge $B \subseteq \Gamma^*$ gdw es eine totale und berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ gibt mit

$$\forall w \in \Sigma^*. w \in A \iff f(w) \in B$$

Wir schreiben dann $A \leq B$.

Intuitiv gilt:

- B ist **mindestens so schwer** zu lösen wie A
- Ist A unlösbar, dann auch B .
- Ist B lösbar, dann erst recht A .

Definition (Spezielles Halteproblem)

Gegeben ein Wort $w \in \{0, 1\}^*$ und die durch **Gödelisierung** kodierte Turingmaschine M_w .

Die als **spezielles Halteproblem** bezeichnete Sprache K enthält alle Turingmaschinen, die bei sich selbst als Eingabe halten.

$$K := \{w \mid M_w[w] \downarrow\}$$

Satz

Das spezielle Halteproblem ist **semi-entscheidbar**, aber es ist **nicht entscheidbar**.

\bar{K} ist also **nicht semi-entscheidbar**.

Definition (Allgemeines Halteproblem)

Gegeben Wörter $w, x \in \{0, 1\}^*$ und die durch **Gödelisierung** kodierte Turingmaschine M_w .

Die als **allgemeines Halteproblem** bezeichnete Sprache H enthält alle Paare M_w und x , sodass M_w bei Eingabe x hält.

$$H := \{w\#x \mid M_w[x] \downarrow\}$$

Satz

Das allgemeine Halteproblem ist **semi-entscheidbar**, aber es ist **nicht entscheidbar**.

\bar{H} ist also **nicht semi-entscheidbar**.

- Es ist $K \leq H$. Warum?

Definition (Rekursiv aufzählbar)

Eine Menge A heißt **rekursiv aufzählbar** wenn $A = \emptyset$ oder es eine **berechenbare** totale Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ gibt, so dass

$$A = \{f(0), f(1), \dots\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f(n)\}$$

Satz

Sei A formale Sprache, dann ist äquivalent:

- A ist *Typ 0 Sprache*
- A *rekursiv aufzählbar*
- A *semi-entscheidbar*, also χ'_A berechenbar
- $A = L(M)$ für eine *TM* M
- A ist *Bild oder Urbild* einer berechenbaren Funktion

Satz (Rice)

Sei F eine Menge berechenbarer Funktionen.

Sei weder $F = \emptyset$ noch $F = \{f \mid f \text{ berechenbar}\}$ (F nicht trivial).

Der Satz von Rice besagt, dass es dann unentscheidbar ist, ob die von einer gegebenen TM M_w berechnete Funktion in F ist.

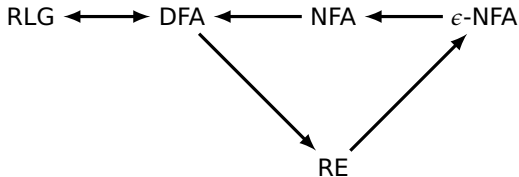
Die formale Sprache

$$\{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w \in F\}$$

ist unentscheidbar.

Intuitiv gilt:

- Nicht-triviale semantische Eigenschaften von Programmen sind unentscheidbar.
- Termination ist unentscheidbar.



Satz

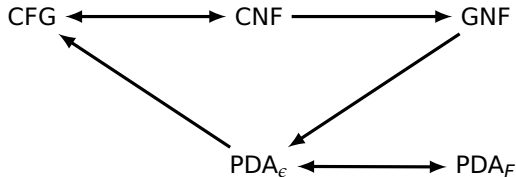
Für eine Darstellung D einer regulären Sprache ist **entscheidbar**:

Wortproblem Gegeben w , gilt $w \in L(D)$?

Leerheitsproblem Ist $L(D) = \emptyset$?

Endlichkeitsproblem Ist $|L(D)| < \infty$?

Äquivalenzproblem Gilt $L(D_1) = L(D_2)$?

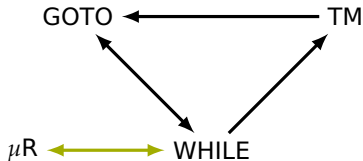


■ Abschlusseigenschaften

	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Stern
REG	ja	ja	ja	ja	ja
CFL	nein	ja	nein	ja	ja

■ Entscheidbarkeit

	Wortproblem	Leerheit	Äquivalenz	Schnittproblem
DFA	$\mathcal{O}(n)$	ja	ja	ja
CFG	$\mathcal{O}(n^3)$	ja	nein	nein



Satz

Sei A formale Sprache, dann ist äquivalent:

- A ist Typ 0 Sprache
- A rekursiv aufzählbar
- A semi-entscheidbar, also χ'_A berechenbar
- $A = L(M)$ für eine TM M
- A ist Bild oder Urbild einer berechenbaren Funktion

■ Abschlusseigenschaften

	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Stern
REG	ja	ja	ja	ja	ja
CFL	nein	ja	nein	ja	ja
CSL	ja	ja	ja	ja	ja
TM	ja	ja	nein	ja	ja

■ Entscheidbarkeit

	Wortproblem	Leerheit	Äquivalenz	Schnittproblem
DFA	$\mathcal{O}(n)$	ja	ja	ja
CFG	$\mathcal{O}(n^3)$	ja	nein	nein
CSL	$\mathcal{O}(2^n)$	nein	nein	nein
TM	nein	nein	nein	nein

Alle formalen Sprachen

Typ 0 - Rekursiv aufzählbar

Grammatik

Turingmaschine, WHILE-Programm, μ -rekursive Funktion

Typ 1 - Kontextsensitiv

Längenmonotone Grammatik

Linear Beschränkter Automat (LBA)

Typ 2 - Kontextfrei

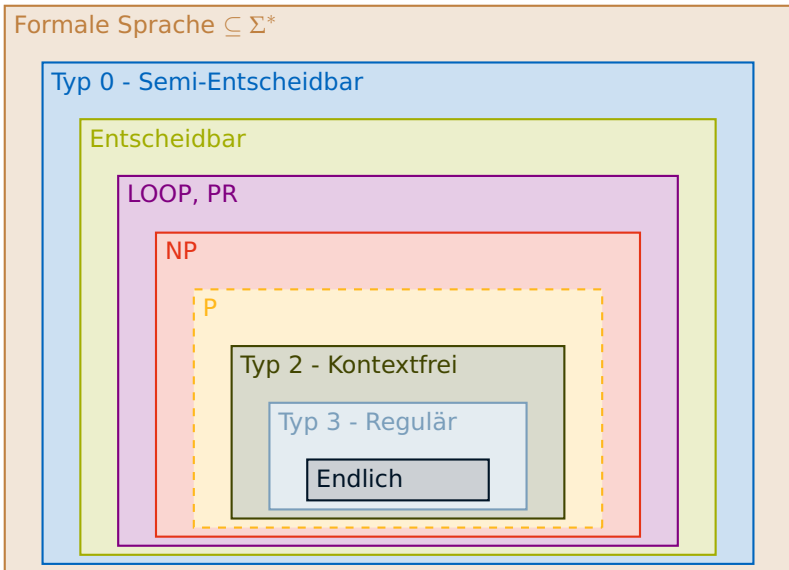
Links nur ein Nichtterminal

Kellerautomat (PDA)

Typ 3 - Regulär

Links- / Rechtsreguläre Grammatik

DFA, NFA, RE



- RE \rightarrow ϵ -NFA \rightarrow NFA \rightarrow DFA
- (Produktautomat)
- Quotientenautomat, Minimale DFAs
- Reguläres Pumpinglemma
- CNF-Synthese
- Nützliche Symbole, CYK
- Kellerautomaten, Deterministische Kellerautomaten
- (GNF-Synthese)
- (PDA \leftrightarrow CFG)
- Kontextfreies Pumpinglemma
- Turingmaschinen
- LOOP und PR
- Berechenbarkeit, Entscheidbarkeit
- Reduktionen (in der Berechenbarkeit)