Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Übungsblatt 6
19. Mai 2014

Theoretische Informatik

Abgabetermin: 28. Mai 2014, 10 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Vorbemerkung: Betrachten Sie die Haus- und Zusatzaufgaben als Wiederholung und Test!

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie im Folgenden Ihre Antworten möglichst knapp!

1. Es gibt einen NFA mit nur einem Zustand, der die Sprache $\{\epsilon\}$ akzeptiert.

2. Der Schnitt jeder kontextfreien Sprache mit einer regulären Sprache ist regulär.

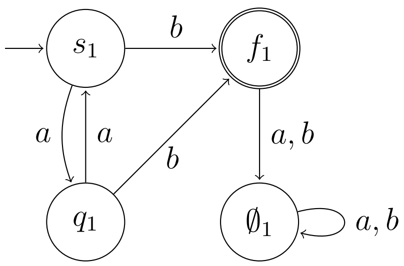
3. Es gibt keine reguläre inhärent mehrdeutige Sprache.

4. Seien $\Sigma = \{0, 1\}$ und α ein regulärer Ausdruck über Σ. Dann kann man in Zeit $O(|w|)$ entscheiden, ob ein Wort $w \in \Sigma^*$ ein Teilwort v enthält mit $v \in L(\alpha)$.

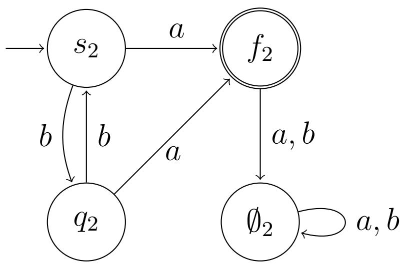
Hausaufgabe 2 (8 Punkte)

Wir betrachten die endlichen Automaten A_1 und A_2 über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, die durch die folgenden Graphen gegeben sind:

A_1:



A_2:



1. Geben Sie einen regulären Ausdruck für $L(A_1)$ an und zeigen Sie $L(A_1) \cap L(A_2) = \emptyset$.

2. Geben Sie einen zu A_1 äquivalenten, minimalen DFA B_1 an und beweisen Sie dessen Minimalität.

   Der Minimalitätsbeweis soll durch Anwendung eines entsprechenden Konstruktionverfahrens für Quotientenautomaten geliefert werden.

3. Seien $\Gamma = \Sigma \cup \{\#\}$ und $L = L(A_1)\{\#\}L(A_2)$. Geben Sie einen minimalen DFA C an, so dass $L = L(C)$ gilt.

4. Auf Γ^* ist eine Äquivalenzrelation $\equiv_L$ wie folgt definiert: Für alle $u, v \in \Gamma^*$ gilt

$$u \equiv_L v \quad \Longleftrightarrow \quad \forall w \in \Gamma^*.\ uw \in L \Leftrightarrow vw \in L\,.$$

   Man zeige: Falls $u \in L(A_1)$ und $v \in L(A_2)$, dann gilt $u \not\equiv_L v$, d. h. u und v sind nicht äquivalent im Sinne von $\equiv_L$.

Hausaufgabe 3 (6 Punkte)

Wir betrachten die Grammatik $G = (V, \{a, b, c, d\}, P, S)$ mit den Produktionen

$$\begin{array}{lll} S \to AZ\,, & X \to b \mid XB\,, & B \to b\,, \\ Z \to SD \mid TD\,, & Y \to c \mid YC\,, & C \to c\,, \\ T \to XY\,, & A \to a\,, & D \to d\,. \end{array}$$

1. Zeigen Sie durch Anwendung des CYK-Verfahrens, dass a^2bc^2d nicht in der von G erzeugten Sprache enthalten ist, d. h. $a^2bc^2d \notin L(G)$.

2. Geben Sie eine Ableitung des Wortes a^2bcd^2 mit Produktionen der Grammatik G an.

3. Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^k b^m c^k d^m \mid k, m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\} \subseteq \{a, b, c, d\}^*$ <u>nicht</u> kontextfrei ist.

4. Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^m b^m c^k d^k \mid k, m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\} \subseteq \{a, b, c, d\}^*$ kontextfrei ist. Ist Sie auch linear?

Hausaufgabe 4 (2 Punkte)

Widerlegen Sie die Regularität der folgenden Sprachen (mit Hilfe des Pumping-Lemmas):

1. $L = \{a^n \mid n = 2^k, k \in \mathbb{N}\}$.

2. $L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_0 \geq |w|_1\}$.

Zusatzaufgabe 3 (wird nicht korrigiert)

Die Permutationssprache L_P zu einer Sprache L besteht aus allen Permutationen aller Wörter in L. Formal setzen wir:

$$L_P = \{u_{\pi(1)} \cdots u_{\pi(k)} \mid k \in \mathbb{N},\ \pi \text{ Permutation und } u_1 \cdots u_k \in L\}$$

1. Geben Sie eine alternative, möglichst einfache Beschreibung der Permutationssprache zu der Sprache $L = L((ab)^*)$ an.

2. Verwenden Sie das Pumping-Lemma, um anhand dieser Sprache zu zeigen, dass reguläre Sprachen nicht abgeschlossen sind unter Permutation (d.h. für eine reguläre Sprache L ist L_P nicht zwangsläufig regulär).

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S, T\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Produktionen

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSb \mid SS \mid \epsilon\,, \\ T &\rightarrow TaTb \mid \epsilon\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie jeweils per Induktion:

1. $L(T) \subseteq L(S)$.
2. Wenn $w \in L(T)$, dann ist auch $awb \in L(T)$.
3. Wenn $v \in L(T)$ und $w \in L(T)$, dann ist auch $vw \in L(T)$.
4. $L(S) \subseteq L(T)$.

Vorbereitung 2

Gegeben sei der Kellerautomat $K = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta)$ mit $\Sigma = \{a, b, \#\}$, $\Gamma = \{Z_0, X, Y, Z\}$ und der Übergangsfunktion

$$\begin{array}{lcllcl} \delta(q, \epsilon, Z_0) & = & \{(q, XZ)\}\,, & \delta(q, a, X) & = & \{(q, XY)\}\,, \\ \delta(q, \#, X) & = & \{(q, \epsilon)\}\,, & \delta(q, b, Y) & = & \{(q, \epsilon)\}\,, \\ \delta(q, a, Z) & = & \{(q, \epsilon)\}\,. & & & \end{array}$$

Leiten Sie eine Grammatik G her, die $L_\epsilon(K)$ erzeugt. Die Korrektheit von G muss durch systematische Anwendung einer geeigneten Methode sichergestellt werden.

Hinweis: $K = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta)$ ist eine Kurzschreibweise für $K = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta, \emptyset)$.

Tutoraufgabe 1

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Die zwei Operationen Spiegelung (w^R) und Negation ($\overline{w}$) seien für $w \in \Sigma^*$ wie folgt definiert:

$$w^R = \begin{cases} \epsilon, & \text{falls } w = \epsilon \\ u^R a, & \text{falls } w = au \text{ für } a \in \Sigma \text{ und } u \in \Sigma^* \end{cases}$$

$$\overline{w} = \begin{cases} \epsilon, & \text{falls } w = \epsilon \\ \hat{a}\overline{u}, & \text{falls } w = au \text{ für } a \in \Sigma \text{ und } u \in \Sigma^* \end{cases}$$

Dabei setzen wir $\hat{0} = 1$ und $\hat{1} = 0$. Wie man leicht (etwa per Induktion) zeigen kann, gelten für diese Operationen auch die Gleichungen $(ua)^R = au^R$ und $\overline{ua} = \overline{u}\hat{a}$ für alle $a \in \Sigma$, $u \in \Sigma^*$. Im Folgenden nehmen wir diese Identitäten als bewiesen an.
Wir betrachten nun die Sprache $L = \{w \in \Sigma^* \mid w^R = \overline{w}\}$ und die Grammatik

$$G = (\{S\}, \Sigma, \{S \to 0S1 \mid 1S0 \mid \epsilon\}, S).$$

Zeigen Sie: L ist genau die von der Grammatik G beschriebene Sprache.

Tutoraufgabe 2

1. Geben Sie einen Kellerautomaten an, der die Sprache $\{a^n b^n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ mit leerem Keller akzeptiert. Geben Sie die Konfigurationsfolge an, die der Automat durchläuft, wenn er das Wort a^3b^3 liest.

2. Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ sei durch folgende Produktionen gegeben.

$$\begin{aligned} S &\to aAB\,, \\ A &\to Sa \mid Sb \mid a\,, \\ B &\to Bb \mid Sb \mid b\,. \end{aligned}$$

   Konstruieren Sie systematisch einen PDA K, der $L(G)$ durch leeren Keller akzeptiert.

Tutoraufgabe 3

Wir betrachten den Kellerautomaten $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \#, \delta)$.
Dabei ist $Q = \{q_0, q_1\}, \Sigma = \{a, b\}, \Gamma = \{\#, A\}$. Die Übergangsfunktion δ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, \#) &= \{(q_0, \#A), (q_1, A)\}\,, \\ \delta(q_1, b, A) &= \{(q_1, \epsilon)\}\,, \end{aligned}$$

und $\delta(q, x, Z) = \emptyset$ für alle anderen Kombinationen aus $q \in Q, x \in \Sigma, Z \in \Gamma$.

1. Konstruieren Sie mit Standardverfahren aus der Vorlesung eine kontextfreie Grammatik G, die $L_\epsilon(M)$ erzeugt.

2. Vereinfachen Sie die erhaltene Grammatik durch Entfernung überflüssiger Variablen und geben Sie eine knappe informelle Beschreibung der erzeugten Sprache an.

3. Wie viele Produktionen ergeben sich im Allgemeinen aus einem Übergang $(q', \gamma) \in \delta(q, b, Z)$ im Kellerautomaten?