Übung 1: Sprachen und Grammatiken

Theoretische Informatik Sommersemester 2014

Markus Kaiser

14. April 2014

Organisatorisches

- Markus Kaiser
  - Mail: tutor@zfix.org
  - Web: theo.zfix.org
  - Hg: tutor.zfix.org

- Meine Übungen
  - Gruppe 04: Montag, 16:15 - 17:45, 03.09.012
  - Gruppe 15: Donnerstag, 10:15 - 11:45, 00.08.038
- Hausaufgaben
  - Abgabe am Mittwoch, 10h
  - Rückgabe in der Übung
  - Kein Notenbonus
  - Trotzdem machen!
- Klausur
  - Endterm: Do 24.07. 11-14h
  - Wiederholung: Do 25.09. 11-14h

Was ist Theoinf?

Aus der VL

- Automatentheorie
  - Rechner mit endlichem oder kellerartigem Speicher
- Grammatiken
  - Syntax von Programmiersprachen
- Berechenbarkeitstheorie
  - Untersuchung der Grenzen, was Rechner prinzipiell können
- Komplexitätstheorie
  - Untersuchung der Grenzen, was Rechner mit begrenzten Ressourcen können

Definition

- Ein Alphabet Σ ist eine endliche Menge.
- Ein Wort über Σ ist eine endliche Folge von Zeichen.
- Eine Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ ist eine formale Sprache

Definition (Operationen auf Sprachen)

- $AB := \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\}$
- $A^{n+1} := A^n A, \qquad A^0 := \{\epsilon\}$
- $A^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A^n$

Definition (Grammatik)

Eine (Phrasenstruktur-)Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ist ein 4-Tupel:

- V endlich viele Nichtterminale (Variablen)
- Σ ein Alphabet von Terminalen
- P endlich viele Produktionen $\subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$
- S ein Startsymbol (Axiom)

Ist $(l, r) \in P$, so schreibt man $l \to r$.

Beispiel

$\Sigma = \{0, 1\}$. Grammatik für alle Wörter ungerader Länge, bei denen alle Nullen vor der ersten Eins stehen und weniger Nullen als Einsen vorhanden sind.

Definition (Grammatik)

Eine (Phrasenstruktur-)Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ist ein 4-Tupel:

- V endlich viele Nichtterminale (Variablen)
- Σ ein Alphabet von Terminalen
- P endlich viele Produktionen $\subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$
- S ein Startsymbol (Axiom)

Ist $(l, r) \in P$, so schreibt man $l \rightarrow r$.

Beispiel

$\Sigma = \{0, 1\}$. Grammatik für alle Wörter ungerader Länge, bei denen alle Nullen vor der ersten Eins stehen und weniger Nullen als Einsen vorhanden sind.

$$S \rightarrow 0S1 \mid S11 \mid 1$$

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik und $\alpha \to \beta \in P$ beliebig.

Definition (Monotonie)

G heißt (längen-)monoton, wenn für $\alpha \neq S$ gilt

$$|\alpha| \leq |\beta|$$

und falls $S \to \epsilon \in P$, dann kommt S nie auf der rechten Seite vor.

Definition (Chomsky-Typen)

Seien $A \in V$, $\gamma, \delta \in (V \cup \Sigma)^*$ und $\beta' \in (V \cup \Sigma)^+$.
Damit G vom Typ k ist, muss für α und β gelten

	α	β
Typ 0	beliebig	beliebig
Typ 1	$= \gamma A \delta$	$= \gamma \beta' \delta$
Typ 2	$\in V$	beliebig
Typ 3	$\in V$	$\in \Sigma^+ \cup \Sigma^* V$

Ab Typ 1 muss G auch monoton sein.

Chomsky-Hierarchie

Alle formalen Sprachen

Typ 0 - Rekursiv aufzählbar
Grammatik

Typ 1 - Kontextsensitiv
Längenmonotone Grammatik

Typ 2 - Kontextfrei
Links nur ein Nichtterminal

Typ 3 - Regulär
Links- / Rechtsreguläre Grammatik

Definition (Intuitive Berechenbarkeit)

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heißt intuitiv berechenbar, wenn es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k$

- nach endlich vielen Schritten mit Ergebnis $f(n_1, \ldots, n_k)$ hält, falls $f(\ldots)$ definiert ist,
- und nicht terminiert, falls $f(\ldots)$ nicht definiert ist.

Churchsche These (nicht beweisbar)

Turing-Maschinen können genau alle intuitiv berechenbaren Funktionen berechnen.

Definition (Entscheidbarkeit)

Eine Menge A heißt entscheidbar gdw ihre charakteristische Funktion

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

berechenbar ist.

Definition (Semi-Entscheidbarkeit)

Eine Menge A heißt semi-entscheidbar gdw

$$\chi'_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ \bot & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

berechenbar ist.