Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Übungsblatt 4
5. Mai 2014

Theoretische Informatik

Abgabetermin: 14. Mai 2014, 10 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{0, 1, (,), +, ^*, \boldsymbol{\emptyset}, \boldsymbol{\epsilon}\}$ die Zeichenmenge, aus der reguläre Ausdrücke über dem Alphabet $\{0, 1\}$ gebildet werden. Wir schreiben hier $+$ anstelle von $|$, um Zeichenverwirrungen zu vermeiden.

1. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die die Menge der regulären Ausdrücke über dem Alphabet $\{0, 1\}$ beschreibt.
2. Ist Ihre Grammatik eindeutig? Falls nicht, geben Sie eine eindeutige Grammatik an, die die Bindungsstärken in regulären Ausdrücken respektiert (also Konkatenation stärker als $+$ bindet).
3. Geben Sie den Syntaxbaum für das Wort 01*0+1 bezüglich Ihrer eindeutigen Grammatik an.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA mit einer Anzahl n von Zuständen. Zeigen Sie:

1. Sei $w = w_1 w_2 \ldots w_{2n} \in \Sigma^*$ mit $|w_i| = 1$ ein Wort der Länge $2n$ und sei $q_0, q_1, \ldots, q_{2n}$ die Folge der Zustände, die M ausgehend von q_0 bei Eingabe von w annimmt. Dann gibt es k, l mit $k < l$, so dass $q_k = q_l$.
2. Falls es ein Wort w der Länge $2n$ gibt mit $w \in L(M)$, dann gibt es unendlich viele Wörter, die der Automat M akzeptiert.
3. Finden Sie ein Verfahren, welches für einen gegebenen NFA M entscheidet, ob $|L(M)| \leq 100$ gilt.

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

1. Für zwei Sprachen L_1 und L_2 über einem Alphabet Σ definieren wir die Linksquotientensprache $L_1/\,L_2 = \{v \mid uv \in L_1 \land u \in L_2\}$. Zeigen Sie: Ist L_1 regulär, so ist auch L_1/L_2 regulär.
2. Für zwei Sprachen L_1 und L_2 über einem Alphabet Σ definieren wir die Rechtsquotientensprache $L_1/\,L_2 = \{v \mid vu \in L_1 \land u \in L_2\}$. Es gilt: Ist L_1 regulär, so ist auch L_1/L_2 regulär. Zeigen Sie diese Implikation durch Rückführung auf die Implikation in der ersten Teilaufgabe.

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Stellen Sie die folgenden Sprachen jeweils durch einen regulären Ausdruck dar.

1. Die Sprache L_1 aller Wörter über $\{0, 1\}$, die mit 010 beginnen und mit 101 enden.
2. Die Sprache L_2 aller Wörter über $\{0, 1\}$, in denen kein Paar aufeinanderfolgender Nullen weiter links steht als ein beliebiges Paar benachbarter Einsen.
3. Sei $L_3 = \{a^m b^n \mid (m + n) \bmod 2 = 1\}$.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Das Reißverschlussprodukt von zwei Sprachen L_1 und L_2 ist wie folgt definiert:

$$L_1 \,\%\, L_2 = \{a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_n b_n \mid a_i \in \Sigma, b_i \in \Sigma, a_1 \ldots a_n \in L_1, b_1 \ldots b_n \in L_2\}$$

1. Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der $L(aba^*) \,\%\, L(bc^*)$ beschreibt.
2. Zeigen Sie durch eine geeignete Automatenkonstruktion: Wenn L_1 und L_2 regulär sind, dann ist auch $L_1 \,\%\, L_2$ regulär.

   Beschreiben Sie ihre Konstruktion zunächst informell.

Zusatzaufgabe 2 (wird nicht korrigiert)

Das sogenannte Shuffle-Produkt spielt in der Theorie der nebenläufigen Systeme eine wichtige Rolle. Für zwei Sprachen L_1 und L_2 bezeichnet $L_1 \parallel L_2$ die Menge der Wörter, die man erhält, indem man zwei Wörter $v \in L_1$ und $w \in L_2$ beliebig miteinander verschränkt. Dabei können sich Teile aus v und w beliebig abwechseln, wobei die Reihenfolge der Zeichen aus v und w jedoch erhalten bleibt. Das kann man sich gut als das Ineinanderschieben zweier Kartenstapel veranschaulichen. Formal definieren wir $L_1 \parallel L_2$ wie folgt:

$$\begin{aligned} L_1 \parallel L_2 = \{v_1 w_1 v_2 w_2 \cdots v_n w_n \mid\ & v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n \in \Sigma^*, \\ & v_1 v_2 \cdots v_n \in L_1 \text{ und } w_1 w_2 \cdots w_n \in L_2\} \end{aligned}$$

1. Versuchen Sie, eine einfache Beschreibung von $L((01)^*) \parallel L((10)^*)$ zu finden.
2. Begründen Sie: Wenn L_1 und L_2 regulär sind, dann ist auch $L_1 \| L_2$ regulär.
   Hinweis: Konstruieren Sie einen NFA für $L_1 \parallel L_2$.
3. Führen Sie die Konstruktion konkret für die Sprachen $L((01)^*)$ und $L((10)^*)$ durch und geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die Sprache beschreibt.

***Hinweis:** Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

Beantworten Sie kurz die folgenden Fragen:

1. Kann man mit einem regulären Ausdruck kontextfreie Grammatiken beschreiben?
2. Wie kann man entscheiden, ob die Sprache einer CFG endlich ist?

Vorbereitung 2

1. Sei $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$.
   Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{ab^{2i}cd^ie \mid i \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.
2. Sei $\Sigma = \{1\}$. Zeigen Sie, dass die Sprache $P = \{1^p \mid p \text{ prim}\}$ nicht regulär ist.

Vorbereitung 3

1. Gegeben seien $\Sigma = \{d, e, f\}$ und $L = \{d^k e^m f^n \mid k, m, n \in \mathbb{N}, m \neq n\}$.
   Zeigen Sie, dass die Sprache L kontextfrei ist.
2. Gegeben seien $\Sigma = \{d, e, f\}$ und $L = \{d^m e^m f^n \mid m, n \in \mathbb{N}, m \neq n\}$.
   Zeigen Sie, dass die Sprache L ein Durchschnitt kontextfreier Sprachen ist.

Vorbereitung 4

Welche Symbole einer durch die folgenden Produktionen gegebenen Grammatik sind erzeugend, welche erreichbar, und welche nützlich?

$$
\begin{array}{lllllll}
S & \to & A \mid a\,, & & & \\
A & \to & BC\,, & B & \to & AE \mid C\,, \\
C & \to & aS\,, & D & \to & aB \mid FS \\
E & \to & EA\,, & F & \to & Ca \mid a\,.
\end{array}
$$

Tutoraufgabe 1 (Produktive Regeln)

Sei G eine kontextfreie Grammatik in CNF, die nur nützliche Symbole enthält. Man zeige: $L(G)$ ist genau dann unendlich, wenn G einen Zyklus enthält, d. h. ein Nichtterminal A, so dass $A \rightarrow_G^n \alpha A \beta$ mit $n > 0$ gilt.

Tutoraufgabe 2 (Pumping-Lemma für CFL)

1. Zeigen Sie, dass $L = \{a^n b^m c^k \mid 0 < n < m < k\}$ keine kontextfreie Sprache ist.
2. Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine beliebige Funktion und es sei $L = \{a^n b^{f(n)} c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

   Beweisen Sie:

   Falls L kontextfrei ist, dann ist f beschränkt, d. h., dann gilt

$$(\exists k \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N})\, [f(n) \leq k]\,.$$

Tutoraufgabe 3 (CNF)

Wandeln Sie die durch folgende Produktionen gegebene Grammatik mit Startsymbol S in Chomsky-Normalform um:

$$\begin{array}{rclrcl} S & \rightarrow & 0A0 \mid 1B1 \mid BB\,, & & & \\ A & \rightarrow & D\,, & B & \rightarrow & S \mid A\,, \\ C & \rightarrow & S \mid \epsilon\,, & D & \rightarrow & C\,. \end{array}$$

Tutoraufgabe 4 (CYK)

Wir betrachten die kontextfreie Grammatik $G = (V, \{a, b\}, P, S)$ mit Produktionen in Chomsky-Normalform

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & YC_3 \mid YX \mid AC_3 \mid AX \mid YY \mid YB \mid YA \mid AY \mid AB \mid AA\,, \\ X & \rightarrow & ZC_2 \mid ZB \mid BZ \mid BB\,, \\ Y & \rightarrow & AC_1 \mid AY \mid AA\,, \\ C_1 & \rightarrow & YZ \mid AZ\,, \\ C_2 & \rightarrow & BZ\,, \\ Z & \rightarrow & YC_3 \mid YX \mid AC_3 \mid AX \mid YY \mid YB \mid YA \mid AY \mid AB \mid AA\,, \\ C_3 & \rightarrow & XZ \mid YZ \mid BZ \mid AZ\,, \\ A & \rightarrow & a\,, \\ B & \rightarrow & b\,. \end{array}$$

Entscheiden Sie mit Hilfe des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus, ob die Wörter *aabaa* und *abab* in der Sprache $L(G)$ enthalten sind! Geben Sie gegebenenfalls Ableitungen an!