Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Übungsblatt 7
27. Mai 2014

Theoretische Informatik

Abgabetermin: 4. Juni 2014, 10 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Für alle $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Sprache $L_k = \{(ab^k)^m\,;\, m \in \mathbb{N}\}$.
(Beispiel: $L_2 = \{(abb)^m\,;\, m \in \mathbb{N}\}$)

1. Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$ durch Angabe einer rechtslinearen Grammatik für L_k, dass L_k regulär ist.
2. Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} L_k$ nicht kontextfrei ist.

   Hinweis: Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L. Man betrachte $(ab^n)^3$.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei die folgende linkslineare Grammatik $G = (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b\}, P, S)$ mit folgenden Produktionen in P:

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & Sa|Bb. \\ A & \rightarrow & Ca|Sb|b. \\ B & \rightarrow & Cb|Aa. \\ C & \rightarrow & Ab|Da. \\ D & \rightarrow & Db|Ba. \end{array}$$

Konstruieren Sie systematisch nach Vorlesung eine zu G äquivalente Grammatik G' in Greibach-Normalform.

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Die Produktionen einer Grammatik $G = (V, \{a, b\}, P, S)$ mit $V = \{S, X, A, B\}$ seien wie folgt gegeben.

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & AXSB \mid AXB\,, \\ X & \rightarrow & a \mid SA \mid AX\,. \\ A & \rightarrow & a\,,\ B \rightarrow b\,. \end{array}$$

1. Alle Nichtterminalen aus V sind nützlich in der Grammatik G. Begründen Sie diesen Sachverhalt.
2. Für $w \in \{a, b\}^*$ bezeichne $|w|_a$ bzw. $|w|_b$ die Anzahl von Vorkommen von a bzw. b in w.

   Zeigen Sie für alle $w \in L(G)$, dass gilt $|w|_a \geq 2\cdot|w|_b$.
3. Geben Sie ein Linksableitung von $w = aaaabb$ an.

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $K = (\{p, q\}, \{0, 1\}, \{Z_0, X\}, \delta, q, Z_0, \{p\})$ ein Kellerautomat mit folgender Übergangsfunktion

$$\begin{array}{lcllcl}
\delta(q, 0, Z_0) & = & \{(q, XZ_0)\}\,, & \delta(q, 0, X) & = & \{(q, XX)\}\,, \\
\delta(q, 1, X) & = & \{(q, X)\}\,, & \delta(q, \epsilon, X) & = & \{(p, \epsilon)\}\,, \\
\delta(p, \epsilon, X) & = & \{(p, \epsilon)\}\,, & \delta(p, 1, X) & = & \{(p, XX)\}\,, \\
\delta(p, 1, Z_0) & = & \{(p, \epsilon)\}\,. & & &
\end{array}$$

Berechnen Sie, ausgehend von der Anfangskonfiguration (q, w, Z_0), alle mit folgenden Eingaben erreichbaren Konfigurationen:

i) $01\,,$ ii) $0011\,.$

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Wir bezeichnen die Anzahl der Vorkommen eines Buchstaben x in einem Wort w mit $|w|_x$. Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid w = uav, u, v \in \Sigma^*, |u|_a = |v|_b\}\,.$$

1. Geben Sie eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ an mit $L_G = L$.
2. Leiten Sie nach Satz der Vorlesung systematisch einen zu G äquivalenten Kellerautomaten K her.

Zusatzaufgabe 4 (wird nicht korrigiert)

Für Zwecke dieser Aufgabe nennen wir einen deterministischen Kellerautomaten $K = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, Z_0, F)$, dessen Übergangsfunktion δ so beschaffen ist, dass der Kellerinhalt nie verändert wird, einen ϵ-DFA. Sei $L(K)$ die Sprache, die von einem ϵ-DFA K mit Endzuständen akzeptiert wird.

Geben Sie ein direktes (nicht über ϵ-NFA) Verfahren an, das zu einem beliebigen ϵ-DFA K einen deterministischen endlichen Automaten A definiert, der die Sprache $L(K)$ erkennt!

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

Seien L eine reguläre Sprache und $L_{\frac{1}{2}} := \{x \in \Sigma^* \,;\, \exists y : |x| = |y|, xy \in L\}$.
Zeigen Sie die Regularität von $L_{\frac{1}{2}}$.

Vorbereitung 2

Definition: Eine Sprache L erfüllt die Präfixbedingung, wenn kein Wort aus L ein echtes Präfix eines anderen Wortes aus L ist.

Geben Sie einen DPDA an, der die Sprache $L = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$ mit Endzustand akzeptiert. Erfüllt L die Präfixbedingung?

Vorbereitung 3

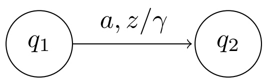
Welche Eigenschaft muss eine kontextfreie Grammatik haben, damit der daraus konstruierte Kellerautomat deterministisch ist?

Vorbereitung 4

Kann man für jede kontextfreie Grammatik G entscheiden, ob sie eine $LR(1)$ Grammatik ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Vorbereitung 5

Ein Queue-Automat (kurz: QA) ist ein Tupel $A = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, z_0, \delta)$. Dabei sind Q (Zustandsmenge), Σ (Eingabealphabet) und Γ (Queuealphabet) endliche Mengen, $q_0 \in Q$ ist der Startzustand, und $z_0 \in \Gamma$ beschreibt die initiale Queue. Die Übergangsfunktion δ hat den Typ $Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$. Graphisch kann eine Transition $(q_2, \gamma) \in \delta(q_1, a, z)$ eines Queue-Automaten wie folgt dargestellt werden:



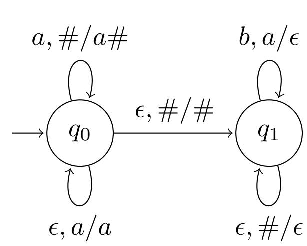
Eine Konfiguration eines Queue-Automaten ist ein Tripel $(q, w, \gamma) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$. Dabei ist q der aktuelle Zustand, w das noch zu lesende Wort und γ der aktuelle Inhalt der Queue. Daraus ergibt sich die Übergangsrelation $\to_A$ zwischen Konfigurationen:

$$(q, bw, z\gamma) \to_A (q', w, \gamma\gamma')\,, \qquad \text{wenn} \qquad (q', \gamma') \in \delta(q, b, z)\,.$$

Die (mit leerer Queue) akzeptierte Sprache eines Queue-Automaten ist

$$L_\epsilon(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q' \in Q.\ (q_0, w, z_0) \to_A^* (q', \epsilon, \epsilon)\}\,.$$

1. Der Queue-Automat $A_1 = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{a, b, \#\}, q_0, \#, \delta)$ sei wie folgt graphisch dargestellt:



   Geben Sie eine akzeptierende Konfigurationsfolge für das Eingabewort $aabb$ an.

2. Geben Sie einen Queue-Automaten A_2 an mit $L(A_2) = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Tutoraufgabe 1

1. Zeigen Sie: Die Sprache $L = \{w \in \{0,1\}^* \,;\, w \text{ enthält gleich viele Nullen und Einsen}\}$ ist deterministisch kontextfrei.

2. Die Sprache $L = \{a^n b^n \,;\, n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{a^n b^{2n} \,;\, n \in \mathbb{N}_0\}$ ist zwar kontextfrei, sie ist aber keine deterministisch kontextfreie Sprache. Beweisen Sie dies durch Widerspruch, indem Sie annehmen, dass es einen DPDA M gibt, der L erkennt, und dann mit modifizierten Kopien M' und M'' von M einen DPDA $\tilde{M}$ konstruieren, der die Sprache $\{a^n b^n c^n \,;\, n \in \mathbb{N}_0\}$ erkennt.

Tutoraufgabe 2

Sei L eine deterministisch kontextfreie Sprache. Man zeige:

Es gibt genau dann einen deterministischen Kellerautomaten K, der L mit leerem Keller akzeptiert, wenn L die Präfixbedingung erfüllt.

Tutoraufgabe 3

Sei K ein deterministischer Kellerautomat K, der eine Sprache L mit Endzustand akzeptiert. Man zeige:

L kann durch eine eindeutige Grammatik erzeugt werden.

Tutoraufgabe 4

Wir betrachten die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit den Produktionen

$$\begin{array}{lcl} S & \to & E\,, \\ E & \to & E + T \mid T\,. \\ T & \to & a \mid (E)\,. \end{array}$$

Ist G eine $LR(1)$ Grammatik? Begründen Sie Ihre Antwort.