Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Übungsblatt 1
7. April 2014

Theoretische Informatik

Abgabetermin: 16. April 2014, 10 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Seien $()$ das Nulltupel, (x) das 1-Tupel und (x, y) das 2-Tupel von Objekten x, y. Zu jeder nicht leeren Menge S gibt es eine Menge $S^\times$, so dass gilt

(0) $() \in S^\times$, (1) $t \in S \Longrightarrow (t) \in S^\times$, (2) $x, y \in S^\times \Longrightarrow (x, y) \in S^\times$,

(3) $S^\times$ ist die kleinste Menge mit den Eigenschaften (0) bis (2).

Sei π die mengentheoretisch kleinste Äquivalenzrelation über $S^\times$, so dass für alle $x, y, z \in S^\times$ gilt

(4) $((), x) \equiv_\pi (x, ()) \equiv_\pi x$, (5) $(x, (y, z)) \equiv_\pi ((x, y), z)$.

Wir definieren $S^\otimes = \{[x]_\pi \,;\, x \in S^\times\}$ und die Operation $\otimes$ über $S^\otimes$ mit

$$[x]_\pi \otimes [y]_\pi = [(x, y)]_\pi \quad \text{für alle} \quad x, y \in S^\times\,.$$

Die Algebra $(S^\otimes, \otimes)$ heißt dann das <u>Tensorprodukt</u> über S. Im Folgenden darf verwendet werden, dass die Operation $\otimes$ wohldefiniert ist.

1. Zeigen Sie, dass jedes Tensorprodukt ein Monoid ist.
2. Das Tensorprodukt $(\Sigma^\otimes, \otimes)$ über einem Alphabet Σ ist isomorph zur Halbgruppe $(\Sigma^*, \circ)$ aller Wörter über Σ mit der Konkatenation $\circ$ von Wörtern. Definieren Sie eine $(\otimes, \circ)$-isomorphe Abbildung von $\Sigma^\otimes$ auf Σ^* und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir studieren die auf der Konkatenation von Wörtern basierende Produktbildung von Mengen von Wörtern. Seien $\Sigma = \{a, b\}$ und $A = \{aa, aaa, b\} \subseteq \Sigma^*$.

1. Man zeige $A \times A \neq AA$.
2. Geben Sie jeweils, wenn möglich, mindestens zwei Wörter an, die innerhalb bzw. außerhalb der folgenden Sprachen liegen. Beachten Sie $0 \notin \mathbb{N}$.
   (a) $L_1 = \{w \,;\, w \in A^2 \wedge w \in A^3\}$.
   (b) $L_2 = \{w \in A^* \,;\, |w| = 3\}$.
   (c) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \,;\, \exists u \in A :\ u^2 w = w^2 u\}$.
   (d) $L_4 = \{(ba^n b)^n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet. Eine binäre Relation $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ heißt symmetrisch-transitiv, falls für alle $a, b, c \in \Sigma^*$ gilt

$$(a, b) \in R \;\wedge\; (b, c) \in R \implies (c, a) \in R\,.$$

Sei S eine beliebige reflexive Relation über Σ^*. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt aller symmetrisch-transitiven Relationen R mit $S \subseteq R$ eine Äquivalenzrelation ist.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Seien $\Sigma = \{(,)\}$ der geordnete Zeichenvorrat mit einer öffnenden bzw. einer schließenden Klammer. Für $w \in \Sigma^*$ definieren wir $|w|_($ bzw. $|w|_)$ als die Anzahl der in w enthaltenen öffnenden bzw. schließenden Klammern. u ist ein <u>Anfangsteilwort</u> (Praefix) von w, falls es ein Wort v gibt, so dass $w = uv$ gilt. Wir nennen ein nicht leeres Wort $w \in \Sigma^*$ <u>positiv</u>, falls $|u|_(> |u|_)$ für alle nicht leeren Anfangsteilwörter u von w gilt.

Bestimmen Sie die Anzahl der positiven Wörter über Σ der Länge $n \in \mathbb{N}$!

<u>Hinweis:</u> Benutzen Sie die Formel zur Lösung des Ballot-Problems aus der Vorlesung Diskrete Strukturen (WS 12/13).

Zusatzaufgabe 1 (Wird nicht korrigiert.)

Um Klammerausdrücke zu zählen, beschränkt man sich auf Ausdrücke ohne Variable und einen einzigen Klammertyp von öffnenden und schließenden Klammern „(“ bzw. „)“. Man betrachtet also eine Menge $K \subseteq \Sigma^*$ von Wörtern über der Zeichenmenge $\Sigma = \{(,)\}$, die mit folgenden Regeln erzeugt werden kann. Dabei bezeichne ε das leere Wort, und die Konkatenation von Wörtern wird durch Nebeneinanderschreiben notiert. K heißt Menge der korrekten Klammerausdrücke über Σ.

- $\varepsilon \in K$,
- $w \in K \implies (w) \in K$,
- $w_1, w_2 \in K \implies w_1 w_2 \in K\,.$

Wir nennen ein Wort $w \in \Sigma^*$ <u>semipositiv</u>, falls $|u|_(\geq |u|_)$ für alle Anfangsteilwörter u von w gilt. Wir setzen im Folgenden voraus, dass $w \in \Sigma^*$ genau dann ein korrekter Klammerausdruck ist, falls w semipositiv ist und $|w|_(= |w|_)$ gilt.

Die Anzahl von korrekten Klammerausdrücken mit $n \in \mathbb{N}_0$ öffnenden Klammern heißt Catalan-Zahl C_n. Beweisen Sie nun die folgenden Aussagen.

1. $$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\,.$$

2. $$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}\,.$$

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

Seien Σ ein Alphabet und $A, B, C \subseteq \Sigma^*$ formale Sprachen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. (i) $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$. (ii) $B \subseteq C \Longrightarrow AB \subseteq AC$.
   Hinweis: Es handelt sich hier um zwei äquivalente Monotonieeigenschaften.
2. $A \subseteq B \Longrightarrow A^n \subseteq B^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
3. $A \subseteq B \Longrightarrow A^* \subseteq B^*$.

Vorbereitung 2

Wir nennen eine Phrasenstrukturgrammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ *nullierbar kontextfrei*, wenn alle Regeln aus P die Form $A \underset{P}{\rightarrow} \alpha$ mit $A \in V$, $\alpha \in \Gamma^*$ und $\Gamma = V \cup \Sigma$ besitzen. Γ^* heißt Menge der Satzformen über dem Vokabular Γ. Sei G eine nullierbar kontextfreie Grammatik.

1. Man zeige für alle $u, v, w \in \Gamma^*$ die Zerlegungseigenschaft
   $$uv \underset{G}{\rightarrow} w \quad \Longrightarrow \quad (\exists\, u', v' \in \Gamma^*)[\, u \underset{G}{\rightarrow}^* u' \;\wedge\; v \underset{G}{\rightarrow}^* v' \;\wedge\; u'v' = w\,].$$
2. Es gilt für alle $u, v \in \Gamma^*$, $a \in \Sigma$ und $n \in \mathbb{N}_0$
   $$uv \underset{G}{\rightarrow}^* a^n \quad \Longrightarrow \quad (\exists\, p, q \in \mathbb{N}_0)[p + q = n \wedge u \underset{G}{\rightarrow}^* a^p \wedge v \underset{G}{\rightarrow}^* a^q].$$

Vorbereitung 3

Betrachten Sie die Phrasenstrukturgrammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to ab, S \to aSb\}, S)$.

1. Geben Sie $L(G)$ an.
2. Geben Sie eine Grammatik $G' = (V', \Sigma', P', S')$ mit $L(G') = L(G)$ an, deren Regeln die Form $A \to x$ oder $A \to xBy$ haben, wobei $A, B \in V'$ und $x, y \in \Sigma'$ seien mit $|xy| \leq 1$.
3. Beweisen Sie $L(G') = L(G)$.

Tutoraufgabe 1 (Herstellung der Monotoniebedingung)

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Phrasenstrukturgrammatik, so dass für alle Regeln $\alpha \to \beta \in P$ gilt $\alpha \in V$ und $\beta \in \Sigma^* \cup \Sigma^* V$. Beweisen Sie, dass $L(G)$ regulär ist.

Hinweis: Die Forderung $\beta \in \Sigma^* \cup \Sigma^* V$ lässt nullierbare Variablen $\neq S$ zu. Man kann die Grammatik G deshalb *nullierbar regulär* nennen.

Tutoraufgabe 2 (Typ 1 ist kontextsensitiv)

Zeigen Sie, dass jede (längen-)monotone Phrasenstrukturgrammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextsensitive Sprache $L(G)$ erzeugt.

Tutoraufgabe 3 (Abzählbarkeit)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass es nicht-entscheidbare formale Sprachen gibt. Steht dies im Widerspruch zu den folgenden Behauptungen?

1. Jede formale Sprache ist abzählbar.
2. In der Vorlesung wurde keine nicht-entscheidbare Sprache angegeben.

Begründen Sie Ihre Antworten!