Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Übungsblatt 9
16. Juni 2014

Theoretische Informatik

Abgabetermin: 25. Juni 2014, 10 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Die Sprache P der Palindrome über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ ist gleich der Menge aller Wörter über Σ, die dieselbe Zeichenfolge ergeben, gleich ob man sie rückwärts oder vorwärts liest, d.h. $P = \{w \in \Sigma^* \,;\, w = w^R\}$.

1. Die Sprache P der Palindrome über dem Alphabet Σ ist kontextfrei. Zeigen Sie, dass P nicht regulär ist.

2. Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär. Zeigen Sie die Regularität der folgenden Menge $L_{\frac{1}{2}P}$ und verfahren Sie dabei ähnlich wie in VA 1 von Blatt 7.

$$L_{\frac{1}{2}P} = \{w \in \Sigma^* \,;\, w^R w \in L\}\,.$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Gegeben sei das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$.

1. Definieren Sie einen Kellerautomaten $K_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, der die Sprache $L_1 = \{ca^n db^n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ mit leerem Keller akzeptiert, so dass also $L_\epsilon(K_1) = L_1$ gilt! Geben Sie den Übergangsgraph Ihres Automaten K_1 an.

   Ist Ihr Automat K_1 deterministisch?

2. Wir betrachten für eine beliebige aber feste natürliche Zahl $k_0 \in \mathbb{N}$ (z.B. $k_0 = 2$) die Sprache
$$L_{k_0} = \{c^{k_0} a^n d^{k_0} b^n \,;\, n \in \mathbb{N}\}\,.$$

   (a) Geben Sie für beliebiges $k_0 \geq 1$ ein Verfahren an zur Konstruktion einer Grammatik G_{k_0} in Chomsky-Normalform, so dass G_{k_0} die Sprache L_{k_0} erzeugt. Benützen Sie u.a. indizierte Nichtterminale U_i, V_i.

   (b) Erzeugen Sie für $k_0 = 2$ durch Anwendung Ihres Verfahrens eine konkrete Grammatik G_2, so dass $L(G_2) = L_2$ gilt.

3. Seien $k_0 \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest und

$$L = \{c^k a^n d^k b^n \,;\, k, n \in \mathbb{N}, k \leq k_0\}\,.$$

   Gibt es einen Kellerautomaten K, der L akzeptiert? Begründung!

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Eine deterministische Turingmaschine $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ nennen wir eingeschränkt speicherfähig, wenn T bei der Abänderung einer Feldinschrift den Kopf nicht bewegt. Formal wird dies durch die folgende Eigenschaft E der Übergangsfunktion δ von T definiert, i.Z. $T \in E$:

(E) $\forall x, y \in \Gamma, p, q \in Q, d \in \{L, R, N\}. \quad [\, x \neq y \;\wedge\; \delta(p, x) = (q, y, d) \,] \implies d = N\,.$

1. Definieren Sie eine eingeschränkt speicherfähige Turingmaschine $T \in E$, die für jede nichtleere Eingabe $w = x_1 x_2 \ldots x_n$ mit Dezimalziffern $x_i \in \Sigma = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ eine Berechnung durchführt, so dass bei Terminierung das Wort $w' = x_1 x_1 \ldots x_1$ der Länge n auf dem sonst leeren Band steht mit Kopf von T auf der letzten Ziffer von w'. Begründen Sie knapp Ihre Konstruktionsidee.

2. Geben Sie ein Verfahren an, das zu jeder deterministischen Turingmaschine $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ eine eingeschränkt speicherfähige Turingmaschine $T' = (Q', \Sigma, \Gamma, \delta', q_0, \Box, F) \in E$ liefert, so dass für die akzeptierten Sprachen $L(T) = L(T')$ gilt.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $\Sigma = \{*, \#\}$. Wir kodieren natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ als Folge $** \ldots *$ der Länge n, d. h. $|** \ldots *| = n$, und stellen Paare $x, y \in \{*\}^*$ als Wort $x\#y \in \Sigma^*$ dar.
Wir betrachten für $x, y, z \in \{*\}^*$ die modifizierte Subtraktion $|z| = |x| \dot{-} |y|$.
(Man beachte $1 \dot{-} 2 = 0$.)

1. Definieren Sie durch Angabe der Übergangsfunktion δ eine deterministische Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$, die für $x, y, z \in \{*\}^*$ die modifizierte Subtraktion $|z| = |x| \dot{-} |y|$ wie folgt durchführt:

   Startkonfiguration: $(\epsilon, q_0, x\#y)\,.$
   Endkonfiguration: $(\Box^k z, q_e, \#r\Box^l)$, mit $q_e \in F$, $r \in \{*\}^*$ und $k, l \in \mathbb{N}\,.$
   Es gilt: $(\epsilon, q_0, x\#y) \to_M^* (\Box^k z, q_e, \#r\Box^l)\,.$

   Beschreiben Sie kurz die Konstruktionsidee für Ihre Maschine.

2. Gilt für Ihre Maschine M bei beliebiger Eingabe $w \in \Sigma^*$ die Gleichung $L(M) = \{x\#y \mid x, y \in \{*\}^*\}$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Zusatzaufgabe 6 (Für Interessierte)

Die Produktionen einer kontextfreien Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ seien gegeben durch

$$S \to A\,, \qquad A \to E \mid E + A \mid E - (A)\,,$$
$$E \to P \mid P \times E \mid E/P\,, \qquad P \to (A) \mid a\,.$$

1. Zeigen Sie für ein geeignetes k, dass G eine LR(k)-Grammatik ist.

2. Zeigen Sie durch Anwendung von Earley's Algorithmus, dass $a \times a - (a + a) \in L(G)$ gilt. Welchen Vorteil kann man aus der Kenntnis der oben eingeführten Lookaheads bei der Ausführung des Earley-Algorithmus ziehen?

Tutoraufgabe 1

Zeigen Sie, dass jede (deterministische) Turingmaschine durch einen Queue-Automaten (siehe VA 5 von Blatt 7) simuliert werden kann.

Tutoraufgabe 2

Wir bezeichnen mit TM_k solche Einband-Turingmaschinen, die jede Zelle des Bandes höchstens k-mal ändern dürfen. Dabei gelten nur Übergänge $\delta(q, x) = (q', y, X)$ mit $x \neq y$ als Änderungen einer Zelle des Bandes (mit $X \in \{N, R, L\}$).

1. Zeigen Sie, dass die Turingmaschinen TM_2 äquivalent zu herkömmlichen Turingmaschinen sind. Benutzen Sie soviel Band wie nötig.

2. Zeigen Sie, dass auch die Turingmaschinen TM_1 äquivalent zu herkömmlichen Turingmaschinen sind. Sie dürfen dabei die Resultate der ersten Teilaufgabe verwenden.

Sie müssen keine expliziten Konstruktionen angeben. Es genügen informelle, aber dennoch vollständige und genaue Beschreibungen.

Tutoraufgabe 3

1. Sei Σ ein Alphabet mit $\# \in \Sigma$. Geben Sie eine deterministische Turingmaschine B an, die die Menge $\{v \in \Sigma^* \,;\, \exists w \in (\Sigma \setminus \{\#\})^*.\ v = \#w\}$ akzeptiert.

2. Wir nennen eine Turingmaschine mit Eingabealphabet Σ und $\# \in \Sigma$ <u>links-markiert</u>, wenn sie sich auf Eingaben $\#w$ mit $w \in (\Sigma \setminus \{\#\})^*$ wie folgt verhält: Nach jedem Berechnungsschritt enthält das Band ein Wort lu mit $u \in (\Gamma \setminus \{\#\})^*$ und $l \in \{\#, \#\#\}$. Links und rechts von lu sei das Band mit Leerzeichen $\Box$ angefüllt.

   Sei $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ mit $\# \notin \Gamma$ (und damit auch $\# \notin \Sigma$) eine deterministische Turingmaschine. Konstruieren Sie eine <u>links-markierte</u> Turingmaschine $T_\#$, so dass für die akzeptierten Sprachen gilt:

   $$L(T_\#) = \{\#w \,;\, w \in L(T)\}\,.$$

   Erläutern Sie Ihre Konstruktion!

   Hinweis: Beachten Sie, dass T an den Wortgrenzen ein Leerzeichen $\Box$ erwartet.

3. Modifizieren Sie Ihre Konstruktion in Punkt 2 derart, dass für die Zustandsmengen Q von T bzw. $Q_\#$ von $T_\#$ jedenfalls $|Q_\#| \leq |Q| + 10$ gilt.

   Hinweis: Im Gegensatz zu den Zustandsmengen ist Γ beliebig erweiterbar.